Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 11, 13.04.2021 r.

Definicja

Niech h będzie formą dwuliniową na przestrzeni V oraz niech h' będzie formą dwuliniową na izomorficznej z V przestrzeni W. Izomorfizm $i : V \to W$ nazwiemy **izometrią** przestrzeni (V, h) i (W, h'), jeśli dla każdych $x, y \in U$ mamy:

$$h(x, y) = h'(i(x), i(y)).$$

Jeśli istnieje izometria (V, h) i (W, h'), wówczas przestrzenie/formy te nazywamy **izometrycznymi** lub **równoważnymi**, ozn. $(V, h) \cong (W, h')$.

Idea: izometria dokonuje „transportu” struktury dwuliniowej z V do W.

Fakt

Niech (V, h) oraz (W, h') będą skończenie wymiarowe i niech $A = G(h, \mathcal{A})$, $B = G(h', \mathcal{B})$, gdzie $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są jakimikolwiek bazami V, W. Wówczas:

$$(V, h) \cong (W, h') \Leftrightarrow A \cong B.$$

Definicja

Niech $(V_1, \langle\, , \rangle_1), (V_2, \langle\, , \rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi liniowymi oraz niech $\phi : V_1 \to V_2$ będzie przekształceniem liniowym.

(a) Mówimy, że ϕ **zachowuje iloczyn skalarny**, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V_1$ zachodzi:
$$\langle \alpha, \beta \rangle_1 = \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle_2.$$

(b) Mówimy, że ϕ **zachowuje długość wektorów** jeśli dla każdego $\alpha \in V_1$ zachodzi
$$\|\alpha\|_1 = \|\phi(\alpha)\|_2,$$
gdzie $\|\alpha\|_1 = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle_1}$, $\|\gamma\|_2 = \sqrt{\langle \gamma, \gamma \rangle_2}$, dla każdych $\alpha \in V_1, \gamma \in V_2$.

Definicja

Niech $(V_1, \langle\,,\,\rangle_1), (V_2, \langle\,,\,\rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi liniowymi oraz niech $\phi : V_1 \to V_2$ będzie przekształceniem liniowym.

(a) Mówimy, że ϕ **zachowuje iloczyn skalarny**, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V_1$ zachodzi:
$$\langle \alpha, \beta \rangle_1 = \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle_2.$$

(b) Mówimy, że ϕ **zachowuje długość wektorów** jeśli dla każdego $\alpha \in V_1$ zachodzi
$$\|\alpha\|_1 = \|\phi(\alpha)\|_2,$$
gdzie $\|\alpha\|_1 = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle_1}$, $\|\gamma\|_2 = \sqrt{\langle \gamma, \gamma \rangle_2}$, dla każdych $\alpha \in V_1, \gamma \in V_2$.

Fakt

Przekształcenie liniowe ϕ przestrzeni euklidesowych zachowuje iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ zachowuje długość wektorów.

Fakt

Przekształcenie liniowe ϕ przestrzeni euklidesowych zachowuje iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ zachowuje długość wektorów.

Dowód. Niech $\phi : (V_1, \langle\ ,\ \rangle_1) \to (V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$.

Fakt

Przekształcenie liniowe ϕ przestrzeni euklidesowych zachowuje iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ zachowuje długość wektorów.

Dowód. Niech $\phi : (V_1, \langle\ ,\ \rangle_1) \to (V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$.

- Jeśli ϕ zachowuje iloczyn skalarny, to dla każdego $\alpha \in V_1$ mamy:
$$\|\phi(\alpha)\|_2 = \sqrt{\langle\, \phi(\alpha), \phi(\alpha)\, \rangle_2} = \sqrt{\langle\, \alpha, \alpha\, \rangle_1} = \|\alpha\|_1 .$$

Fakt

Przekształcenie liniowe ϕ przestrzeni euklidesowych zachowuje iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ zachowuje długość wektorów.

Dowód. Niech $\phi : (V_1, \langle\ ,\ \rangle_1) \to (V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$.

- Jeśli ϕ zachowuje iloczyn skalarny, to dla każdego $\alpha \in V_1$ mamy:
$$\|\phi(\alpha)\|_2 = \sqrt{\langle\, \phi(\alpha), \phi(\alpha)\,\rangle_2} = \sqrt{\langle\, \alpha, \alpha\,\rangle_1} = \|\alpha\|_1.$$
- Na odwrót: załóżmy, że ϕ zachowuje długość wektorów. Mamy
$$2\langle\, \alpha, \beta\,\rangle = \|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha\|^2 - \|\beta\|^2,$$
dla dowolnych wektorów α, β.

Fakt

Przekształcenie liniowe ϕ przestrzeni euklidesowych zachowuje iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ zachowuje długość wektorów.

Dowód. Niech $\phi : (V_1, \langle \, , \, \rangle_1) \to (V_2, \langle \, , \, \rangle_2)$.

- Jeśli ϕ zachowuje iloczyn skalarny, to dla każdego $\alpha \in V_1$ mamy:
$$\|\phi(\alpha)\|_2 = \sqrt{\langle\, \phi(\alpha), \phi(\alpha)\,\rangle_2} = \sqrt{\langle\, \alpha, \alpha\,\rangle_1} = \|\alpha\|_1.$$
- Na odwrót: załóżmy, że ϕ zachowuje długość wektorów. Mamy
$$2\langle\, \alpha, \beta\,\rangle = \|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha\|^2 - \|\beta\|^2,$$
dla dowolnych wektorów α, β.
- Zatem dla każdych $\alpha, \beta \in V_1$ mamy:
$$\begin{aligned} 2\langle\, \phi(\alpha), \phi(\beta)\,\rangle_2 &= \|\phi(\alpha) + \phi(\beta)\|_2^2 - \|\phi(\alpha)\|_2^2 - \|\phi(\beta)\|_2^2 = \\ &= \|\alpha + \beta\|_1^2 - \|\alpha\|_1^2 - \|\beta\|_1^2 = 2\langle\, \alpha, \beta\,\rangle_1. \end{aligned}$$

Fakt

Jeśli przekształcenie liniowe ϕ przestrzeni euklidesowych zachowuje iloczyn skalarny, to ϕ jest monomorfizmem.

Dowód. Dla $\alpha \in \mathrm{ker}(\phi)$ mamy $\phi(\alpha) = 0$, czyli $\|\phi(\alpha)\|_2 = 0$, skąd $\|\alpha\|_1 = 0$.

Fakt

Jeśli przekształcenie liniowe ϕ przestrzeni euklidesowych zachowuje iloczyn skalarny, to ϕ jest monomorfizmem.

Dowód. Dla $\alpha \in \ker(\phi)$ mamy $\phi(\alpha) = 0$, czyli $\|\phi(\alpha)\|_2 = 0$, skąd $\|\alpha\|_1 = 0$.

Definicja

Niech $(V_1, \langle\,,\,\rangle_1), (V_2, \langle\,,\,\rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi liniowymi. Mówimy, że przekształcenie liniowe $\phi : V_1 \to V_2$ jest **izometrią** przestrzeni euklidesowej $(V_1, \langle\,,\,\rangle_1)$ na przestrzeń euklidesową $(V_2, \langle\,,\,\rangle_2)$ jeśli:

(a) ϕ jest izomorfizmem przestrzeni liniowej V_1 na przestrzeń liniową V_2,

(b) ϕ zachowuje iloczyn skalarny.

Izometrię przestrzeni $(V, \langle\,,\,\rangle)$ na $(V, \langle\,,\,\rangle)$ nazywamy **izometrią przestrzeni euklidesowej** $(V, \langle\,,\,\rangle)$.

Twierdzenie

Niech $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1), (V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi. Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V_1 \to V_2$:

(1) ϕ jest izometrią przestrzeni euklidesowej $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ na $(V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$,

(2) ϕ przeprowadza każdą bazę ortonormalną przestrzeni $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ na bazę ortonormalną $(V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$,

(3) ϕ przeprowadza pewną bazę ortonormalną przestrzeni $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ na bazę ortonormalną $(V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$.

Co więcej, jeśli $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \in M_n(\mathbb{R})$ jest macierzą izometrii przestrzeni euklidesowych w bazach ortonormalnych, wówczas kolumny A są prostopadłe w $(\mathbb{R}^n, st)$. Innymi słowy $A^T A = I$.

Dowód. Nietrywialna jest tylko implikacja (3) $\Rightarrow$ (1).

Dowód. Nietrywialna jest tylko implikacja (3) $\Rightarrow$ (1).

- Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – baza ortonormalna $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ oraz $\mathcal{A}' = (\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_n))$ – baza ortonormalna $(V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$. Niech

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, \quad \beta = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n.$$

Dowód. Nietrywialna jest tylko implikacja (3) $\Rightarrow$ (1).

- Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – baza ortonormalna $(V_1, \langle\, , \rangle_1)$ oraz $\mathcal{A}' = (\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_n))$ – baza ortonormalna $(V_2, \langle\, , \rangle_2)$. Niech

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, \quad \beta = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n.$$

- Mamy:

$$\begin{aligned}
\langle\, \alpha, \beta \,\rangle_1 &= \langle\, x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n \,\rangle_1 = \\
&= x_1 y_1 \langle\, \alpha_1, \alpha_1 \,\rangle_1 + \ldots + x_n y_n \langle\, \alpha_n, \alpha_n \,\rangle_1 = \\
&= x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \\
&= x_1 y_1 \langle\, \phi(\alpha_1), \phi(\alpha_1) \,\rangle_2 + \ldots + x_n y_n \langle\, \phi(\alpha_n), \phi(\alpha_n) \,\rangle_2 = \\
&= \langle\, x_1\phi(\alpha_1) + \ldots + x_n\phi(\alpha_n), y_1\phi(\alpha_1) + \ldots + y_n\phi(\alpha_n) \,\rangle_2 = \\
&= \langle\, \phi(\alpha), \phi(\beta) \,\rangle_2.
\end{aligned}$$

czyli ϕ zachowuje iloczyn skalarny – jest izometrią.

Dowód cd. Niech $\phi : (V_1, \langle\ ,\ \rangle_1) \to (V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ będzie izometrią. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathcal{N} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ – bazy ortonormalna $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$. Rozważamy macierz $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \in M_n(\mathbb{R})$ i chcemy pokazać, że $A^T A = I$.

Dowód cd. Niech $\phi : (V_1, \langle\ ,\ \rangle_1) \to (V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ będzie izometrią. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{N} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – bazy ortonormalna $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$. Rozważamy macierz $A = M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \in M_n(\mathbb{R})$ i chcemy pokazać, że $A^T A = I$.

- Niech $i \neq j$ oraz $\phi(\alpha_i) = x_1\beta_1 + \ldots + x_n\beta_n, \phi(\alpha_j) = y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n$. Aby pokazać tezę wystarczy pokazać, że:

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = 0, \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1. \qquad (\spadesuit)$$

Dowód cd. Niech $\phi : (V_1, \langle\, ,\, \rangle_1) \to (V_2, \langle\, ,\, \rangle_2)$ będzie izometrią. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{N} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – bazy ortonormalna $(V_1, \langle\, ,\, \rangle_1)$, $(V_2, \langle\, ,\, \rangle_2)$. Rozważamy macierz $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \in M_n(\mathbb{R})$ i chcemy pokazać, że $A^T A = I$.

- Niech $i \neq j$ oraz $\phi(\alpha_i) = x_1\beta_1 + \ldots + x_n\beta_n, \phi(\alpha_j) = y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n$. Aby pokazać tezę wystarczy pokazać, że:
$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = 0, \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1. \qquad (\spadesuit)$$
- $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle_1 = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \Rightarrow \langle \phi(\alpha_i), \phi(\alpha_j) \rangle_2 = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$, bo ϕ – izometria.

Dowód cd. Niech $\phi : (V_1, \langle\ ,\ \rangle_1) \to (V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ będzie izometrią. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{N} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – bazy ortonormalna $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$. Rozważamy macierz $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \in M_n(\mathbb{R})$ i chcemy pokazać, że $A^T A = I$.

- Niech $i \neq j$ oraz $\phi(\alpha_i) = x_1\beta_1 + \ldots + x_n\beta_n, \phi(\alpha_j) = y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n$. Aby pokazać tezę wystarczy pokazać, że:

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = 0, \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1. \qquad (\spadesuit)$$

- $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle_1 = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \Rightarrow \langle \phi(\alpha_i), \phi(\alpha_j) \rangle_2 = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$, bo ϕ – izometria.

- Ale przecież $\langle \beta_i, \beta_j \rangle = 0$, dla $i \neq j$ oraz $\langle \beta_i, \beta_i \rangle = 1$, czyli:

$$\begin{aligned} \langle\, \phi(\alpha_i), \phi(\alpha_j) \,\rangle_2 &= \langle\, x_1\beta_1 + \ldots + x_n\beta_n, y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n \,\rangle_2 = \\ &= x_1y_1\langle\, \beta_1, \beta_1 \,\rangle_2 + \ldots + x_ny_n\langle\, \beta_n, \beta_n \,\rangle_2 = \\ &= x_1y_1 + \ldots + x_ny_n. \end{aligned}$$

  co natychmiast daje $(\spadesuit)$ i tezę twierdzenia.

Definicja

Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ nazywamy **ortogonalną**, jeśli $A^T A = I$.
Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych rozmiaru n oznaczamy przez $O(n)$.
Zbiór macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1 oznaczamy przez $SO(n)$.

Definicja

Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ nazywamy **ortogonalną**, jeśli $A^T A = I$.
Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych rozmiaru n oznaczamy przez $O(n)$.
Zbiór macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1 oznaczamy przez $SO(n)$.

Wniosek

Przekształcenie liniowe $\phi : V_1 \to V_2$ jest izometrią przestrzeni euklidesowej $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ na przestrzeń euklidesową $(V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych (równoważnie: dla każdych) baz ortonormalnych $\mathcal{A}_1$ przestrzeni $(V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ oraz $\mathcal{A}_2$ przestrzeni $(V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2}$ jest ortogonalna.

Definicja

Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ nazywamy **ortogonalną**, jeśli $A^T A = I$.
Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych rozmiaru n oznaczamy przez $O(n)$.
Zbiór macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1 oznaczamy przez $SO(n)$.

Wniosek

Przekształcenie liniowe $\phi : V_1 \to V_2$ jest izometrią przestrzeni euklidesowej $(V_1, \langle\, ,\, \rangle_1)$ na przestrzeń euklidesową $(V_2, \langle\, ,\, \rangle_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych (równoważnie: dla każdych) baz ortonormalnych $\mathcal{A}_1$ przestrzeni $(V_1, \langle\, ,\, \rangle_1)$ oraz $\mathcal{A}_2$ przestrzeni $(V_2, \langle\, ,\, \rangle_2)$ macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2}$ jest ortogonalna.

Endomorfizm $\phi \in End((\mathbb{R}^2, \langle\, ,\, \rangle_{st}))$ dany wzorem $\phi((x_1, x_2)) = (x_1, -x_1 + x_2)$ nie jest izometrią, bo st jest bazą ortonormalną w $(\mathbb{R}^2, st)$ oraz:

$$(M(\phi)_{st}^{st})^T \cdot M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Macierz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ nazywamy **ortogonalną**, jeśli $A^T A = I$.
Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych rozmiaru n oznaczamy przez $O(n)$.
Zbiór macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1 oznaczamy przez $SO(n)$.

Wniosek

Przekształcenie liniowe $\phi : V_1 \to V_2$ jest izometrią przestrzeni euklidesowej $(V_1, \langle\, , \,\rangle_1)$ na przestrzeń euklidesową $(V_2, \langle\, , \,\rangle_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych (równoważnie: dla każdych) baz ortonormalnych $\mathcal{A}_1$ przestrzeni $(V_1, \langle\, , \,\rangle_1)$ oraz $\mathcal{A}_2$ przestrzeni $(V_2, \langle\, , \,\rangle_2)$ macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2}$ jest ortogonalna.

Wniosek

Jeśli $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są bazami ortonormalnymi $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \,\rangle)$, to $(M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1} = (M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T$.
Zatem dla izometrii ϕ przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \,\rangle)$: $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = (M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T \cdot M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Przypomnienie

Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots \beta_n\}$ przestrzeni V są:

- **zgodnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0$,
- **przeciwnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} < 0$.

Przypomnienie

Rodzinę wszystkich baz zgodnie zorientowanych z pewną bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy **orientacją** przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest **zorientowana**, jeśli wybrana jest jedna z jej (dwóch) orientacji. W przestrzeni zorientowanej mówimy, że jej baza $\mathcal{A}$ jest **dodatnio (ujemnie) zorientowana**, jeśli zorientowana zgodnie (przeciwnie) z wybraną orientacją przestrzeni V.

Definicja

Niech $(V, \langle\, , \,\rangle)$ będzie dwuwymiarową przestrzenią euklidesową. Załóżmy, że V jest zorientowana i niech $\mathcal{A}$ będzie bazą ortonormalną tej przestrzeni, zorientowaną zgodnie z zadaną orientacją. Wówczas **obrotem o kąt** θ nazywamy przekształcenie $\phi : V \to V$ zadane warunkiem

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Definicja

Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie dwuwymiarową przestrzenią euklidesową. Załóżmy, że V jest zorientowana i niech $\mathcal{A}$ będzie bazą ortonormalną tej przestrzeni, zorientowaną zgodnie z zadaną orientacją. Wówczas **obrotem o kąt** θ nazywamy przekształcenie $\phi : V \to V$ zadane warunkiem

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Przykład. Niech $(\mathbb{R}^2, \langle\ ,\ \rangle_{st})$. Bierzemy $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane macierzą

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\mathbb{R}^2$ ma orientację wyzn. przez $st = (\epsilon_1, \epsilon_2)$, to ϕ jest obrotem o kąt $-\frac{\pi}{3}$ (bo w bazie ortonormalnej $(\mathbb{R}^2, \langle\ ,\ \rangle_{st})$ zgodnej z orientacją ma macierz obrotu o kąt θ).

Definicja

Niech W będzie 2-wymiarową podprzestrzenią zorientowaną w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\,,\,\rangle)$. Przekształcenie $\phi \in End(V)$ takie, że

- $\phi|_W$ jest obrotem o kat θ w przestrzeni W,
- $\phi|_{W^\perp}$ jest identycznością na przestrzeni $W^\perp$

nazywamy **obrotem o kat θ wokół podprzestrzeni $W^\perp$.**

Innymi słowy, jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest taką bazą przestrzeni V, że $\mathcal{A}' = (\alpha_1, \alpha_2)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni W zorientowaną zgodnie z orientacją W, natomiast $(\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ jest dowolną bazą przestrzeni $W^\perp$, to $M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$ jest w postaci

$$\begin{bmatrix} O_\theta & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{bmatrix}, \qquad \text{gdzie } O_\theta = M(\phi|_W)^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Przykład. $V = (\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{st}$ oraz $W = \mathrm{lin}((0,1,0),(0,0,1))$ z orientacją wyznaczoną przez $\mathcal{A}' = ((0,1,1),(0,1,0))$. Określamy $\phi : V \to V$ wzorem:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Wówczas $\phi|_W$ jest obrotem o kąt $-\theta$ wokół $\mathrm{lin}((1,0,0))$. Dlaczego nie o kąt θ?

Przykład. $V = (\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{st}$ oraz $W = \mathrm{lin}((0,1,0),(0,0,1))$ z orientacją wyznaczoną przez $\mathcal{A}' = ((0,1,1),(0,1,0))$. Określamy $\phi : V \to V$ wzorem:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Wówczas $\phi|_W$ jest obrotem o kąt $-\theta$ wokół $\mathrm{lin}((1,0,0))$. Dlaczego nie o kąt θ?

Niech $\mathcal{B}' = ((0,1,0),(0,0,1))$. Bazy $\mathcal{A}'$ oraz $\mathcal{B}'$ przestrzeni W są przeciwnie zorientowane, bo $\det M(\mathrm{id}_W)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} < 0.$

Przykład. $V = (\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{st}$ oraz $W = \mathrm{lin}((0,1,0),(0,0,1))$ z orientacją wyznaczoną przez $\mathcal{A}' = ((0,1,1),(0,1,0))$. Określamy $\phi : V \to V$ wzorem:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Wówczas $\phi|_W$ jest obrotem o kąt $-\theta$ wokół $\mathrm{lin}((1,0,0))$. Dlaczego nie o kąt θ?

Niech $\mathcal{B}' = ((0,1,0),(0,0,1))$. Bazy $\mathcal{A}'$ oraz $\mathcal{B}'$ przestrzeni W są przeciwnie zorientowane, bo $\det M(\mathrm{id}_W)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} < 0$.

A zatem bazy $\mathcal{A}'$ oraz $((0,0,1),(0,1,0))$ są zgodnie zorientowane. Baza $\mathbb{R}^3$ postaci $\mathcal{B} = ((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ również jest ortonormalna, a w niej przekształcenie ϕ ma macierz

$$M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie

Każda izometria 2-wymiarowej przestrzeni euklidesowej liniowej jest

- albo obrotem o macierzy (w pewnej bazie i przy pewnej orientacji)

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- albo symetrią prostopadłą o macierzy:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

względem podprzestrzeni $\mathrm{lin}((\sin\theta, 1-\cos\theta))$.

Ćwiczenie

Każda izometria 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej liniowej jest

- albo obrotem o macierzy (w pewnej bazie) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
- albo obrotem z odbiciem o macierzy (–//–) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,
- albo symetrią płaszczyznową o macierzy (–//–) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Uwaga: zbiór $SO(3) \subset M_3(\mathbb{R})$ to tzw. **grupa obrotów**.

Twierdzenie (Cartan)

Dla każdej izometrii ϕ przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ istnieje liczba $k \leq n$ taka, że ϕ jest złożeniem k symetrii prostopadłych względem pewnych $n-1$ wymiarowych podprzestrzeni w V (zwanych zwykle odbiciami).

Twierdzenie (Cartan)

Dla każdej izometrii ϕ przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ istnieje liczba $k \leq n$ taka, że ϕ jest złożeniem k symetrii prostopadłych względem pewnych $n-1$ wymiarowych podprzestrzeni w V (zwanych zwykle odbiciami).

Kilka uwag

- izometria zachowuje lub odwraca orientację w zależności od liczby symetrii,
- każda izometria ma wyznacznik oraz (jeśli są) wartości własne ± 1,
- wniosek: każda macierz ortogonalna jest iloczynem macierzy symetrii.

Twierdzenie (Cartan)

Dla każdej izometrii ϕ przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ istnieje liczba $k \leq n$ taka, że ϕ jest złożeniem k symetrii prostopadłych względem pewnych $n-1$ wymiarowych podprzestrzeni w V (zwanych zwykle odbiciami).

Dowód. Stosujemy indukcję po n.

- Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste, bo są tylko dwie izometrie 1-wymiarowej przestrzeni euklidesowej liniowej: id oraz $-\mathrm{id}$.

Twierdzenie (Cartan)

Dla każdej izometrii ϕ przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ istnieje liczba $k \leq n$ taka, że ϕ jest złożeniem k symetrii prostopadłych względem pewnych $n-1$ wymiarowych podprzestrzeni w V (zwanych zwykle odbiciami).

Dowód. Stosujemy indukcję po n.

- Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste, bo są tylko dwie izometrie 1-wymiarowej przestrzeni euklidesowej liniowej: id oraz $-\mathrm{id}$.
- Załóżmy, że teza działa dla $\dim V < n$. Niech $\phi : V \to V$ będzie izometrią n wymiarowej przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Załóżmy, że $\phi \neq \mathrm{id}$ (inaczej teza jest jasna). Wybierzmy dowolny niezerowy wektor $\alpha \in V$ i rozpatrzmy $W = \mathrm{lin}(\alpha)$.

Twierdzenie (Cartan)

Dla każdej izometrii ϕ przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ istnieje liczba $k \leq n$ taka, że ϕ jest złożeniem k symetrii prostopadłych względem pewnych $n-1$ wymiarowych podprzestrzeni w V (zwanych zwykle odbiciami).

Dowód. Stosujemy indukcję po n.

- Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste, bo są tylko dwie izometrie 1-wymiarowej przestrzeni euklidesowej liniowej: id oraz $-\mathrm{id}$.
- Załóżmy, że teza działa dla $\dim V < n$. Niech $\phi : V \to V$ będzie izometrią n wymiarowej przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Załóżmy, że $\phi \neq \mathrm{id}$ (inaczej teza jest jasna). Wybierzmy dowolny niezerowy wektor $\alpha \in V$ i rozpatrzmy $W = \mathrm{lin}(\alpha)$.
- Możliwe są dwa przypadki: gdy $\phi(\alpha) = \alpha$ oraz gdy $\phi(\alpha) \neq \alpha$.

Dowód cd. Przypadek 1: $\phi(\alpha) = \alpha$, $W = \text{lin}(\alpha)$.

Dowód cd. Przypadek 1: $\phi(\alpha) = \alpha$, $W = \mathrm{lin}(\alpha)$.

- Wówczas W oraz $W^\perp$ są ϕ-niezmiennicze, bo dla każdego $\beta \in W^\perp$ zachodzi $\langle \phi(\beta), \alpha \rangle = \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 0$. Zatem $\phi|_{W^\perp}$ jest izometrią.

Dowód cd. Przypadek 1: $\phi(\alpha) = \alpha$, $W = \text{lin}(\alpha)$.

- Wówczas W oraz $W^\perp$ są ϕ-niezmiennicze, bo dla każdego $\beta \in W^\perp$ zachodzi $\langle \phi(\beta), \alpha \rangle = \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 0$. Zatem $\phi|_{W^\perp}$ jest izometrią.
- Założyliśmy, że $\phi \neq \text{id}$, więc $\phi|_{W^\perp} \neq \text{id}_{W^\perp}$ i z założenia indukcyjnego $\phi|_{W^\perp} = \phi_k \circ \ldots \circ \phi_1$, gdzie $k \leq n - 1$ oraz $\phi_i : W^\perp \to W^\perp$ jest symetrią prostopadłą względem $n - 2$ wymiarowych podprzestrzeni $W_i \subseteq W^\perp$.

Dowód cd. Przypadek 1: $\phi(\alpha) = \alpha$, $W = \text{lin}(\alpha)$.

- Wówczas W oraz $W^\perp$ są ϕ-niezmiennicze, bo dla każdego $\beta \in W^\perp$ zachodzi $\langle \phi(\beta), \alpha \rangle = \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 0$. Zatem $\phi|_{W^\perp}$ jest izometrią.
- Założyliśmy, że $\phi \neq \text{id}$, więc $\phi|_{W^\perp} \neq \text{id}_{W^\perp}$ i z założenia indukcyjnego $\phi|_{W^\perp} = \phi_k \circ \ldots \circ \phi_1$, gdzie $k \leq n-1$ oraz $\phi_i : W^\perp \to W^\perp$ jest symetrią prostopadłą względem $n-2$ wymiarowych podprzestrzeni $W_i \subseteq W^\perp$.
- Określamy podprzestrzenie $V_i = W \oplus W_i$, dla $i = 1, \ldots, k$ (mamy $W_i \subseteq W^\perp$).

Dowód cd. Przypadek 1: $\phi(\alpha) = \alpha$, $W = \mathrm{lin}(\alpha)$.

- Wówczas W oraz $W^\perp$ są ϕ-niezmiennicze, bo dla każdego $\beta \in W^\perp$ zachodzi $\langle \phi(\beta), \alpha \rangle = \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 0$. Zatem $\phi|_{W^\perp}$ jest izometrią.
- Założyliśmy, że $\phi \neq \mathrm{id}$, więc $\phi|_{W^\perp} \neq \mathrm{id}_{W^\perp}$ i z założenia indukcyjnego $\phi|_{W^\perp} = \phi_k \circ \ldots \circ \phi_1$, gdzie $k \leq n-1$ oraz $\phi_i : W^\perp \to W^\perp$ jest symetrią prostopadłą względem $n-2$ wymiarowych podprzestrzeni $W_i \subseteq W^\perp$.
- Określamy podprzestrzenie $V_i = W \oplus W_i$, dla $i = 1, \ldots, k$ (mamy $W_i \subseteq W^\perp$).
- Określamy $\psi_i : V \to V$ wzorem $\psi_i(a\alpha + w) = a\alpha + \phi_i(w)$, dla $w \in W^\perp$.

Dowód cd. Przypadek 1: $\phi(\alpha) = \alpha$, $W = \mathrm{lin}(\alpha)$.

- Wówczas W oraz $W^\perp$ są ϕ-niezmiennicze, bo dla każdego $\beta \in W^\perp$ zachodzi $\langle \phi(\beta), \alpha \rangle = \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 0$. Zatem $\phi|_{W^\perp}$ jest izometrią.
- Założyliśmy, że $\phi \neq \mathrm{id}$, więc $\phi|_{W^\perp} \neq \mathrm{id}_{W^\perp}$ i z założenia indukcyjnego $\phi|_{W^\perp} = \phi_k \circ \ldots \circ \phi_1$, gdzie $k \leq n-1$ oraz $\phi_i : W^\perp \to W^\perp$ jest symetrią prostopadłą względem $n-2$ wymiarowych podprzestrzeni $W_i \subseteq W^\perp$.
- Określamy podprzestrzenie $V_i = W \oplus W_i$, dla $i = 1, \ldots, k$ (mamy $W_i \subseteq W^\perp$).
- Określamy $\psi_i : V \to V$ wzorem $\psi_i(a\alpha + w) = a\alpha + \phi_i(w)$, dla $w \in W^\perp$.
- Skoro ϕ_i jest symetrią $W^\perp$ względem W_i, czyli $\phi_i^2 = \mathrm{id}_{W_i}$, to jest symetrią V względem $n-1$ wymiarowej podprzestrzeni V_i, bo:

$$\psi_i^2((a\alpha + w)) = \psi_i(a\alpha + \phi_i(w)) = a\alpha + \phi_i^2(w) = a\alpha + w.$$

Dowód cd. Przypadek 1: $\phi(\alpha) = \alpha$, $W = \mathrm{lin}(\alpha)$.

- Wówczas W oraz $W^{\perp}$ są ϕ-niezmiennicze, bo dla każdego $\beta \in W^{\perp}$ zachodzi $\langle \phi(\beta), \alpha \rangle = \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 0$. Zatem $\phi|_{W^{\perp}}$ jest izometrią.
- Założyliśmy, że $\phi \neq \mathrm{id}$, więc $\phi|_{W^{\perp}} \neq \mathrm{id}_{W^{\perp}}$ i z założenia indukcyjnego $\phi|_{W^{\perp}} = \phi_k \circ \ldots \circ \phi_1$, gdzie $k \leq n-1$ oraz $\phi_i : W^{\perp} \to W^{\perp}$ jest symetrią prostopadłą względem $n-2$ wymiarowych podprzestrzeni $W_i \subseteq W^{\perp}$.
- Określamy podprzestrzenie $V_i = W \oplus W_i$, dla $i = 1, \ldots, k$ (mamy $W_i \subseteq W^{\perp}$).
- Określamy $\psi_i : V \to V$ wzorem $\psi_i(a\alpha + w) = a\alpha + \phi_i(w)$, dla $w \in W^{\perp}$.
- Skoro ϕ_i jest symetrią $W^{\perp}$ względem W_i, czyli $\phi_i^2 = \mathrm{id}_{W_i}$, to jest symetrią V względem $n-1$ wymiarowej podprzestrzeni V_i, bo:
$$\psi_i^2((a\alpha + w)) = \psi_i(a\alpha + \phi_i(w)) = a\alpha + \phi_i^2(w) = a\alpha + w.$$
- Rozkład $W \oplus W^{\perp}$ jest ϕ-niezmienniczy, więc $\phi = \psi_k \circ \ldots \circ \psi_1$, wynika z:
$$\begin{aligned}(\psi_k \circ \ldots \circ \psi_1)|_W &= \mathrm{id}_W = \phi|_W,\\ (\psi_k \circ \ldots \circ \psi_1)|_{W^{\perp}} &= \phi_k \circ \ldots \circ \phi_1 = \phi|_{W^{\perp}}.\end{aligned}$$

Dowód cd. Przypadek 2, gdy $\phi(\alpha) \neq \alpha$.

Dowód cd. Przypadek 2, gdy $\phi(\alpha) \neq \alpha$.

- Niech ψ bedzie symetrią prostopadłą względem $\mathrm{lin}(\phi(\alpha) - \alpha)^\perp$. Wówczas $\psi(\phi(\alpha)) = \alpha$. Istotnie, ϕ jest izometrią, czyli $\|\alpha\| = \|\phi(\alpha)\|$. Co więcej,

$$\langle \alpha + \phi(\alpha), \alpha - \phi(\alpha) \rangle = \|\alpha\| - \|\phi(\alpha)\| - \langle \alpha, \phi(\alpha) \rangle + \langle \phi(\alpha), \alpha \rangle = 0,$$

więc $\alpha + \phi(\alpha) \perp \alpha - \phi(\alpha)$. W szczególności $\alpha + \phi(\alpha) \in \mathrm{lin}(\phi(\alpha) - \alpha)^\perp$. Stąd (jak w dowodzie tw. Witta o przedłużaniu izometrii):

$$\psi(\phi(\alpha)) = \psi\left(\frac{\phi(\alpha)+\alpha}{2} + \frac{\phi(\alpha)-\alpha}{2}\right) = \frac{\phi(\alpha)+\alpha}{2} - \frac{\phi(\alpha)-\alpha}{2} = \alpha.$$

Dowód cd. Przypadek 2, gdy $\phi(\alpha) \neq \alpha$.

- Niech ψ bedzie symetrią prostopadłą względem $\text{lin}(\phi(\alpha) - \alpha)^{\perp}$. Wówczas $\psi(\phi(\alpha)) = \alpha$. Istotnie, ϕ jest izometrią, czyli $\|\alpha\| = \|\phi(\alpha)\|$. Co więcej,
$$\langle \alpha + \phi(\alpha), \alpha - \phi(\alpha) \rangle = \|\alpha\| - \|\phi(\alpha)\| - \langle \alpha, \phi(\alpha) \rangle + \langle \phi(\alpha), \alpha \rangle = 0,$$
więc $\alpha + \phi(\alpha) \perp \alpha - \phi(\alpha)$. W szczególności $\alpha + \phi(\alpha) \in \text{lin}(\phi(\alpha) - \alpha)^{\perp}$. Stąd (jak w dowodzie tw. Witta o przedłużaniu izometrii):
$$\psi(\phi(\alpha)) = \psi\left(\frac{\phi(\alpha) + \alpha}{2} + \frac{\phi(\alpha) - \alpha}{2} \right) = \frac{\phi(\alpha) + \alpha}{2} - \frac{\phi(\alpha) - \alpha}{2} = \alpha.$$
- Czyli izometria $\psi \circ \phi$ przeprowadza α na siebie.

Dowód cd. Przypadek 2, gdy $\phi(\alpha) \neq \alpha$.

- Niech ψ bedzie symetrią prostopadłą względem $\mathrm{lin}(\phi(\alpha) - \alpha)^{\perp}$. Wówczas $\psi(\phi(\alpha)) = \alpha$. Istotnie, ϕ jest izometrią, czyli $\|\alpha\| = \|\phi(\alpha)\|$. Co więcej,
$$\langle \alpha + \phi(\alpha), \alpha - \phi(\alpha)\rangle = \|\alpha\| - \|\phi(\alpha)\| - \langle \alpha, \phi(\alpha)\rangle + \langle \phi(\alpha), \alpha\rangle = 0,$$
więc $\alpha + \phi(\alpha) \perp \alpha - \phi(\alpha)$. W szczególności $\alpha + \phi(\alpha) \in \mathrm{lin}(\phi(\alpha) - \alpha)^{\perp}$. Stąd (jak w dowodzie tw. Witta o przedłużaniu izometrii):
$$\psi(\phi(\alpha)) = \psi\left(\frac{\phi(\alpha) + \alpha}{2} + \frac{\phi(\alpha) - \alpha}{2}\right) = \frac{\phi(\alpha) + \alpha}{2} - \frac{\phi(\alpha) - \alpha}{2} = \alpha.$$
- Czyli izometria $\psi \circ \phi$ przeprowadza α na siebie.
- Jeśli $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$, to z $\psi^2 = \mathrm{id}$ mamy $\phi = \psi$, co daje tezę twierdzenia.

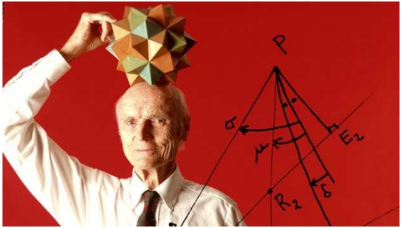
Dowód cd. Przypadek 2, gdy $\phi(\alpha) \neq \alpha$.

- Niech ψ bedzie symetrią prostopadłą względem $\mathrm{lin}(\phi(\alpha)-\alpha)^{\perp}$. Wówczas $\psi(\phi(\alpha)) = \alpha$. Istotnie, ϕ jest izometrią, czyli $\|\alpha\| = \|\phi(\alpha)\|$. Co więcej,
$$\langle \alpha + \phi(\alpha), \alpha - \phi(\alpha) \rangle = \|\alpha\| - \|\phi(\alpha)\| - \langle \alpha, \phi(\alpha) \rangle + \langle \phi(\alpha), \alpha \rangle = 0,$$
więc $\alpha + \phi(\alpha) \perp \alpha - \phi(\alpha)$. W szczególności $\alpha + \phi(\alpha) \in \mathrm{lin}(\phi(\alpha)-\alpha)^{\perp}$. Stąd (jak w dowodzie tw. Witta o przedłużaniu izometrii):
$$\psi(\phi(\alpha)) = \psi\left(\frac{\phi(\alpha)+\alpha}{2} + \frac{\phi(\alpha)-\alpha}{2}\right) = \frac{\phi(\alpha)+\alpha}{2} - \frac{\phi(\alpha)-\alpha}{2} = \alpha.$$
- Czyli izometria $\psi \circ \phi$ przeprowadza α na siebie.
- Jeśli $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$, to z $\psi^2 = \mathrm{id}$ mamy $\phi = \psi$, co daje tezę twierdzenia.
- Jeśli $\psi \circ \phi \neq \mathrm{id}$ to mocy Przypadku 1 mamy $\psi \circ \phi = \psi_k \circ \ldots \circ \psi_1$, gdzie $k \leq n-1$ i $\psi_k : V \to V$ są symetriami prostopadłymi względem podprzestrzeni wymiaru $n-1$. Zatem $\phi = \psi \circ \psi_k \circ \ldots \circ \psi_1$ jest złożeniem $k+1$ symetrii, gdzie $k \leq n-1$. Zatem dowód jest zakończony.

Słynne zagadnienie rozwiązane przez H. S. M. Coxetera (1934)

Rozważmy skończoną liczbę **odbić** $s_1, \ldots, s_r$ przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ i zacznijmy je ze sobą składać, a dalej składać złożenia itd. Innymi słowy rozważmy **grupę generowaną** przez symetrie $s_1, \ldots, s_r$, ozn. $W(s_1, \ldots, s_r)$, nazywaną **grupą symetrii**. Kiedy ta grupa jest skończona i jak ją opisać?

Uwaga: grupa symetrii nie składa się z samych symetrii, ale ze złożeń symetrii. $W(s_1, \ldots, s_r)$ to najmniejsza grupa zawierająca wszystkie symetrie $s_1, \ldots, s_r$.



Harold Scott MacDonald Coxeter, „Król geometrii” - jeden z najbardziej znanych geometrów XX wieku.

Słynne zagadnienie rozwiązane przez H. S. M. Coxetera (1934)

Rozważmy skończoną liczbę **odbić** $s_1, \ldots, s_r$ przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbb{R}^n, \langle\, ,\, \rangle)$ i zacznijmy je ze sobą składać, a dalej składać złożenia itd. Innymi słowy rozważmy **grupę generowaną** przez symetrie $s_1, \ldots, s_r$, ozn. $W(s_1, \ldots, s_r)$, nazywaną **grupą symetrii**. Kiedy ta grupa jest skończona i jak ją opisać?

Przykłady.

- Niech $\theta = 2\pi/m$ oraz niech:
$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Wówczas elementy grupy H_m (tzw. grupa dihedralna) generowanej przez symetrie T oraz $R_\theta \cdot T$ to izometrie zachowujące n-kąt foremny na płaszczyźnie (o środku w środku układu współrzędnych).

Słynne zagadnienie rozwiązane przez H. S. M. Coxetera (1934)

Rozważmy skończoną liczbę **odbić** $s_1, \ldots, s_r$ przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ i zacznijmy je ze sobą składać, a dalej składać złożenia itd. Innymi słowy rozważmy **grupę generowaną** przez symetrie $s_1, \ldots, s_r$, ozn. $W(s_1, \ldots, s_r)$, nazywaną **grupą symetrii**. Kiedy ta grupa jest skończona i jak ją opisać?

Przykłady.

- Niech $\Delta^3 = \{(t_1, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}^4 \,|\, t_1 + \ldots + t_4 = 1,\ t_i \geq 0\}$ będzie czworościanem foremnym o wierzchołkach (na razie nie wiemy co to znaczy):

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0), \quad e_4 = (0, 0, 0, 1).$$

  Każdej parze wierzchołków odpowiada symetria s_{ij}, która przeprowadza $i-$ty wierzchołek na j-ty, a pozostałych nie rusza. Każda izometria zachowująca czworościan Δ^3 jest złożeniem elementarnych symetrii. **Grupa symetrii** czworościanu, to po prostu grupa permutacji S_4 zbioru 4-elementowego.

Słynne zagadnienie rozwiązane przez H. S. M. Coxetera (1934)

Rozważmy skończoną liczbę **odbić** $s_1, \dots, s_r$ przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ i zacznijmy je ze sobą składać, a dalej składać złożenia itd. Innymi słowy rozważmy **grupę generowaną** przez symetrie $s_1, \dots, s_r$, ozn. $W(s_1, \dots, s_r)$, nazywaną **grupą symetrii**. Kiedy ta grupa jest skończona i jak ją opisać?

Przykłady.

- **Twierdzenie**: każda skończona grupa **generowana przez obroty** w $\mathbb{R}^3$ (w języku macierzy: skończona podgrupa w $SO(3)$) *jest*
  - albo grupą obrotów lub **grupą symetrii** wielokąta foremnego,
  - albo jedną z trzech **grup symetrii** zachowujących wielościany platońskie (!).

  Prosty tekst, gdzie (z obrazkami) opowiedziane jest jakie są te grupy odbić: Symmetry Groups of Platonic Solids, David Newcomb:
  `https://dnewcomb.com/pdfs/Platonic%20Solids.pdf`

Słynne zagadnienie rozwiązane przez H. S. M. Coxetera (1934)

Rozważmy skończoną liczbę **odbić** $s_1, \ldots, s_r$ przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ i zacznijmy je ze sobą składać, a dalej składać złożenia itd. Innymi słowy rozważmy **grupę generowaną** przez symetrie $s_1, \ldots, s_r$, ozn. $W(s_1, \ldots, s_r)$, nazywaną **grupą symetrii**. Kiedy ta grupa jest skończona i jak ją opisać?

Ogólne wyniki Coxetera (1934-1935)

- Grupy odbić w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ to tzw. grupy Coxetera, por. *Discrete groups generated by reflections*, Annals of Mathematics, 35, s. 588–621, 1934.
- (1935) Każda skończona grupa Coxetera jest izomorficzna z pewną grupą odbić w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, por. *The groups determinated by the relations of the form $R_i^2 = (R_iR_j)^{k_{ij}} = 1$*, $R_i^2 = (R_iR_j)^{k_{ij}} = 1$, J. London Math. Soc., 10.

Słynne zagadnienie rozwiązane przez H. S. M. Coxetera (1934)

Rozważmy skończoną liczbę **odbić** $s_1, \dots, s_r$ przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbb{R}^n, \langle\, ,\, \rangle)$ i zacznijmy je ze sobą składać, a dalej składać złożenia itd. Innymi słowy rozważmy **grupę generowaną** przez symetrie $s_1, \dots, s_r$, ozn. $W(s_1, \dots, s_r)$, nazywaną **grupą symetrii**. Kiedy ta grupa jest skończona i jak ją opisać?

Ważne hasła (są związane z wieloma ważnymi zagadnieniami):

- systemy pierwiastków (root systems), czyli szczególne układy odbić w $\mathbb{R}^n$,
- grupy odbić i grupy Coxetera (m.in. wielościanów foremnych w $\mathbb{R}^n$),
- diagramy Coxetera-Dynkina (jeszcze do nich wrócimy, bo są ważne).

Źródła:

(1) Sira Gratz: Amazing Diagrams Everywhere:
http://www1.maths.leeds.ac.uk/~pmtdgh/lms2019/gratz/Introduction.
(2) Prof. Justyna Kosakowska: Grupy Coxetera i diagramy Coxetera–Dynkina
https://www-users.mat.umk.pl/~justus/conf.html

Słynne zagadnienie rozwiązane przez H. S. M. Coxetera (1934)

Rozważmy skończoną liczbę **odbić** $s_1, \ldots, s_r$ przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \,\rangle)$ i zacznijmy je ze sobą składać, a dalej składać złożenia itd. Innymi słowy rozważmy **grupę generowaną** przez symetrie $s_1, \ldots, s_r$, ozn. $W(s_1, \ldots, s_r)$, nazywaną **grupą symetrii**. Kiedy ta grupa jest skończona i jak ją opisać?

Diagramy Coxetera-Dynkina związane z klasyfikacją skończonych grup symetrii (i bardzo wieloma innymi ważnymi obiektami w matematyce).