Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 1, 02.03.2021 r.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ nazywamy **endomorfizmem przestrzeni** V. Zbiór wszystkich endomorfizmów przestrzeni V oznaczamy $\mathrm{End}(V)$. Zatem $\mathrm{End}(V) = L(V, V)$. **Macierzą endomorfizmu** ϕ **w bazie** $\mathcal{A}$ przestrzeni V nazywamy macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ nazywamy **endomorfizmem przestrzeni** V. Zbiór wszystkich endomorfizmów przestrzeni V oznaczamy $\mathrm{End}(V)$. Zatem $\mathrm{End}(V) = L(V, V)$.
Macierzą endomorfizmu ϕ **w bazie** $\mathcal{A}$ przestrzeni V nazywamy macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

Nasze cele na najbliższe wykłady (zapisane na razie nieformalnie):

- odczytać naturę geometryczną endomorfizmu z jego macierzy,

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ nazywamy **endomorfizmem przestrzeni** V. Zbiór wszystkich endomorfizmów przestrzeni V oznaczamy $\mathrm{End}(V)$. Zatem $\mathrm{End}(V) = L(V, V)$. **Macierzą endomorfizmu** ϕ **w bazie** $\mathcal{A}$ przestrzeni V nazywamy macierz $M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$.

Nasze cele na najbliższe wykłady (zapisane na razie nieformalnie):

- odczytać naturę geometryczną endomorfizmu z jego macierzy,
- odczytać naturę geometryczną endomorfizmu z jego niezmienników,

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ nazywamy **endomorfizmem przestrzeni** V. Zbiór wszystkich endomorfizmów przestrzeni V oznaczamy $\mathrm{End}(V)$. Zatem $\mathrm{End}(V) = L(V, V)$. **Macierzą endomorfizmu** ϕ **w bazie** $\mathcal{A}$ przestrzeni V nazywamy macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

Nasze cele na najbliższe wykłady (zapisane na razie nieformalnie):

- odczytać naturę geometryczną endomorfizmu z jego macierzy,
- odczytać naturę geometryczną endomorfizmu z jego niezmienników,
- nadawać strukturę geometryczną przez zadanie endomorfizmów,

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ nazywamy **endomorfizmem przestrzeni** V. Zbiór wszystkich endomorfizmów przestrzeni V oznaczamy $\mathrm{End}(V)$. Zatem $\mathrm{End}(V) = L(V, V)$. **Macierzą endomorfizmu** ϕ **w bazie** $\mathcal{A}$ przestrzeni V nazywamy macierz $M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$.

Nasze cele na najbliższe wykłady (zapisane na razie nieformalnie):

- odczytać naturę geometryczną endomorfizmu z jego macierzy,
- odczytać naturę geometryczną endomorfizmu z jego niezmienników,
- nadawać strukturę geometryczną przez zadanie endomorfizmów,
- wyróżnienie endomorfizmów *prostych* i zrozumienie ich geometrii,

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ nazywamy **endomorfizmem przestrzeni** V. Zbiór wszystkich endomorfizmów przestrzeni V oznaczamy $\mathrm{End}(V)$. Zatem $\mathrm{End}(V) = L(V, V)$. **Macierzą endomorfizmu** ϕ **w bazie** $\mathcal{A}$ przestrzeni V nazywamy macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

Nasze cele na najbliższe wykłady (zapisane na razie nieformalnie):

- odczytać naturę geometryczną endomorfizmu z jego macierzy,
- odczytać naturę geometryczną endomorfizmu z jego niezmienników,
- nadawać strukturę geometryczną przez zadanie endomorfizmów,
- wyróżnienie endomorfizmów *prostych* i zrozumienie ich geometrii,
- zrozumienie *metody*, według której stawiamy pytania matematyczne.

Przykład: **rzut.** Hasło: naturę geometryczną rzutu można odczytać z macierzy.

Trudno odczytać, że $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ jest rzutem, jeśli mamy tylko:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

Przykład: **rzut.** Hasło: naturę geometryczną rzutu można odczytać z macierzy.

Trudno odczytać, że $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ jest rzutem, jeśli mamy tylko:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

ale w bazie $\mathcal{A} = ((1,2,2),(1,2,1),(1,1,2))$ mamy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Przykład: **rzut**. Hasło: naturę geometryczną rzutu można odczytać z macierzy.

Trudno odczytać, że $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ jest rzutem, jeśli mamy tylko:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

ale w bazie $\mathcal{A} = ((1,2,2),(1,2,1),(1,1,2))$ mamy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

- Dla dowolnej macierzy B rzędu 2 w $M_3(\mathbb{R})$ istnieją bazy $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = B$ (pokażemy to w ogólnej wersji na ćwiczeniach).

Przykład: **rzut**. Hasło: naturę geometryczną rzutu można odczytać z macierzy.

Trudno odczytać, że $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ jest rzutem, jeśli mamy tylko:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

ale w bazie $\mathcal{A} = ((1,2,2),(1,2,1),(1,1,2))$ mamy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

- Dla dowolnej macierzy B rzędu 2 w $M_3(\mathbb{R})$ istnieją bazy $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = B$ (pokażemy to w ogólnej wersji na ćwiczeniach).
- Tymczasem ψ jest rzutem w $\mathbb{R}^3$ na podprzestrzeń dwuwymiarową wtedy i tylko wtedy, gdy ma w pewnej bazie $\mathbb{R}^3$ macierz jak w $(*)$.

Przykład: **rzut.** Hasło: niezmiennikiem rzutu jest wielomian $\lambda^2 - \lambda$.

Przykład: **rzut.** Hasło: niezmiennikiem rzutu jest wielomian $\lambda^2 - \lambda$.

Definicja

Niech $w \in K[\lambda]$ będzie postaci:

$$a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n.$$

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie V jest nad ciałem K oraz niech $A \in M_s(K)$. Definiujemy:

- $w(\phi) = a_0 \cdot \mathrm{id}_V + a_1 \cdot \phi + \ldots + a_n \cdot \phi^n \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $\phi^n = \underbrace{\phi \circ \phi \circ \ldots \circ \phi}_{n}$.
- $w(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_n A^n \in M_s(K)$.

Przykład: **rzut.** Hasło: niezmiennikiem rzutu jest wielomian $\lambda^2 - \lambda$.

Definicja

Niech $w \in K[\lambda]$ będzie postaci:

$$a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n.$$

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie V jest nad ciałem K oraz niech $A \in M_s(K)$. Definiujemy:

- $w(\phi) = a_0 \cdot \mathrm{id}_V + a_1 \cdot \phi + \ldots + a_n \cdot \phi^n \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $\phi^n = \underbrace{\phi \circ \phi \circ \ldots \circ \phi}_{n}$.
- $w(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_n A^n \in M_s(K)$.

Uwaga (było w I semestrze lub będzie na ćwiczeniach)

Niech V będzie przestrzenią liniową nad K oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas ϕ jest rzutem wtedy i tylko wtedy, gdy $w(\phi) = 0$, gdzie $w(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$.

Przykład: **rzut.** Hasło: rzutowanie wyznacza rozkład, i odwrotnie.

Przykład: **rzut**. Hasło: rzutowanie wyznacza rozkład, i odwrotnie.

- Jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to wiążemy z nim naturalne rzutowania: $\pi_1 : V \to V_1$ oraz $\pi_2 : V \to V_2$, gdzie dla $v = v_1 + v_2$ oraz $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ mamy
$$\pi_1(v) = v_1, \quad \pi_2 = v_2.$$
- Jeśli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ oraz $\phi^2 = \phi$, to istnieje rozkład V na sumę prostą przestrzeni V_1, V_2, gdzie
$$\phi|_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1}, \quad \phi|_{V_2} = 0.$$

Przykład: **rzut**. Hasło: rzutowanie wyznacza rozkład, i odwrotnie.

- Jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to wiążemy z nim naturalne rzutowania: $\pi_1 : V \to V_1$ oraz $\pi_2 : V \to V_2$, gdzie dla $v = v_1 + v_2$ oraz $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ mamy
$$\pi_1(v) = v_1, \quad \pi_2 = v_2.$$
- Jeśli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ oraz $\phi^2 = \phi$, to istnieje rozkład V na sumę prostą przestrzeni V_1, V_2, gdzie
$$\phi|_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1}, \quad \phi|_{V_2} = 0.$$

Czy inne endomorfizmy też wyznaczają takie rozkłady? Na co rozkładamy?
Czy każdy endomorfizm jest wyznaczony przez jakiś rozkład? Rozkład na co?

Przykład: **rzut**. Hasło: rzutowanie wyznacza rozkład, i odwrotnie.

- Jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to wiążemy z nim naturalne rzutowania: $\pi_1 : V \to V_1$ oraz $\pi_2 : V \to V_2$, gdzie dla $v = v_1 + v_2$ oraz $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ mamy
$$\pi_1(v) = v_1, \quad \pi_2 = v_2.$$
- Jeśli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ oraz $\phi^2 = \phi$, to istnieje rozkład V na sumę prostą przestrzeni V_1, V_2, gdzie
$$\phi|_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1}, \quad \phi|_{V_2} = 0.$$

Czy inne endomorfizmy też wyznaczają takie rozkłady? Na co rozkładamy?
Czy każdy endomorfizm jest wyznaczony przez jakiś rozkład? Rozkład na co?

Twierdzenie - ciekawostka (Erdös, 1967)

Każdy nieizomorfizm skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej jest złożeniem skończenie wielu rzutów.

Przykład: **rzut.** Hasło: rzutowanie(nia) wyznaczają produkty.

Niech $\pi : X \to X$ będzie rzutem. Wówczas $X = \operatorname{im}\pi \oplus \ker\pi$ i istnieje także rzut $\pi' : X \to X$ na $\ker\pi$ wzdłuż $\operatorname{im}\pi$. Co więcej, dla każdej przestrzeni liniowej Y oraz przekształceń liniowych $f_1 : Y \to \operatorname{im}\pi$ oraz $f_2 : Y \to \ker\pi$ istnieje **dokładnie jedno przekształcenie** $f : Y \to X$ takie, że przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ \operatorname{im}\pi & X \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & \ker\pi \end{tikzcd}$$

Przykład: **rzut.** Hasło: rzutowanie(nia) wyznaczają produkty.

Niech $\pi : X \to X$ będzie rzutem. Wówczas $X = \operatorname{im}\pi \oplus \ker\pi$ i istnieje także rzut $\pi' : X \to X$ na $\ker\pi$ wzdłuż $\operatorname{im}\pi$. Co więcej, dla każdej przestrzeni liniowej Y oraz przekształceń liniowych $f_1 : Y \to \operatorname{im}\pi$ oraz $f_2 : Y \to \ker\pi$ istnieje **dokładnie jedno przekształcenie** $f : Y \to X$ takie, że przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
\operatorname{im}\pi & X \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & \ker\pi
\end{tikzcd}$$

Podobne konstrukcje można przeprowadzać dla innych struktur (kategorii), jak:

- zbiory (i funkcje między nimi),
- częściowe porządki (gdzie nierówność $x \leq y$ zapisujemy jako $x \longrightarrow y$),
- grupy, pierścienie, algebry, grafy (i ich *homomorfizmy*, cokolwiek to znaczy).

Uwaga

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni V i niech $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$B = C^{-1}AC,$$

gdzie $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, to znaczy $\mathcal{C}$ jest macierzą zamiany współrzędnych od $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$.

Uwaga

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni V i niech $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$B = C^{-1}AC,$$

gdzie $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, to znaczy $\mathcal{C}$ jest macierzą zamiany współrzędnych od $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$.

Dowód: Mamy $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(\mathrm{id} \circ \phi \circ \mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = C^{-1}AC$.

Uwaga

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni V i niech $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$B = C^{-1}AC,$$

gdzie $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, to znaczy $\mathcal{C}$ jest macierzą zamiany współrzędnych od $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$.

Dowód: Mamy $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(\mathrm{id} \circ \phi \circ \mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = C^{-1}AC$.

Definicja

Macierze $A, B \in M_n(K)$ nazywamy **podobnymi nad ciałem** K, jeśli istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(K)$ taka, że

$$B = C^{-1}AC.$$

Uwaga

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni V i niech $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$B = C^{-1}AC,$$

gdzie $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, to znaczy $\mathcal{C}$ jest macierzą zamiany współrzędnych od $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$.

Dowód: Mamy $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(\mathrm{id} \circ \phi \circ \mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = C^{-1}AC$.

Definicja

Macierze $A, B \in M_n(K)$ nazywamy **podobnymi nad ciałem** K, jeśli istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(K)$ taka, że

$$B = C^{-1}AC.$$

Ćwiczenie. Relacja podobieństwa w zbiorze $M_n(K)$ jest relacją równoważności.

Uwaga

Niech $A, B \in M_n(K)$. Następujące warunki są równoważne:

(a) macierze A, B są podobne nad K,

(b) istnieje $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n takie, że

$$A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}, \quad B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

Uwaga

Niech $A, B \in M_n(K)$. Następujące warunki są równoważne:

(a) macierze A, B są podobne nad K,

(b) istnieje $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n takie, że

$$A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}, \quad B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

- Implikacja (b) $\Rightarrow$ (a) wynika z poprzedniej uwagi. Dowodzimy (a) $\Rightarrow$ (b). Przypuśćmy, że $B = C^{-1}AC$, dla pewnej macierzy odwracalnej C. Niech $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ będzie zadany warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$.

Uwaga

Niech $A, B \in M_n(K)$. Następujące warunki są równoważne:

(a) macierze A, B są podobne nad K,

(b) istnieje $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n takie, że

$$A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}, \quad B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

- Implikacja (b) $\Rightarrow$ (a) wynika z poprzedniej uwagi. Dowodzimy (a) $\Rightarrow$ (b). Przypuśćmy, że $B = C^{-1}AC$, dla pewnej macierzy odwracalnej C. Niech $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ będzie zadany warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$.
- Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni K^n złożoną z kolumn macierzy C. Wówczas $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{st}$, więc $C^{-1} = M(id)_{st}^{\mathcal{B}}$.

Uwaga

Niech $A, B \in M_n(K)$. Następujące warunki są równoważne:

(a) macierze A, B są podobne nad K,

(b) istnieje $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n takie, że

$$A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}, \quad B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

- Implikacja (b) $\Rightarrow$ (a) wynika z poprzedniej uwagi. Dowodzimy (a) $\Rightarrow$ (b). Przypuśćmy, że $B = C^{-1}AC$, dla pewnej macierzy odwracalnej C. Niech $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ będzie zadany warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$.
- Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni K^n złożoną z kolumn macierzy C. Wówczas $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{st}$, więc $C^{-1} = M(id)_{st}^{\mathcal{B}}$.
- Stąd:
$$B = C^{-1}AC = M(id)_{st}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(id)_{\mathcal{B}}^{st} = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

Uwaga

Niech $A, B \in M_n(K)$. Następujące warunki są równoważne:

(a) macierze A, B są podobne nad K,

(b) istnieje $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n takie, że

$$A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}, \quad B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

- Implikacja (b) $\Rightarrow$ (a) wynika z poprzedniej uwagi. Dowodzimy (a) $\Rightarrow$ (b). Przypuśćmy, że $B = C^{-1}AC$, dla pewnej macierzy odwracalnej C. Niech $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ będzie zadany warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$.
- Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni K^n złożoną z kolumn macierzy C. Wówczas $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{st}$, więc $C^{-1} = M(id)_{st}^{\mathcal{B}}$.
- Stąd:
$$B = C^{-1}AC = M(id)_{st}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(id)_{\mathcal{B}}^{st} = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$
- Otrzymaliśmy zatem $A = M(\phi)_{st}^{st}$, $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Problem stwierdzania kiedy macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne nad K to jedno z centralnych zagadnień tego kursu.

Problem stwierdzania kiedy macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne nad K to jedno z centralnych zagadnień tego kursu.

Nasze podejście:

- wskazać niezmienniki podobieństwa,
- wskazać typy macierzy, do których chcemy *upodabniać* inne,
- wskazać związki między postacią macierzy, a geometrią przekształceń,
- rozstrzygnąć na ile sama natura ciała K ma tu znaczenie.

Problem stwierdzania kiedy macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne nad K to jedno z centralnych zagadnień tego kursu.

Nasze podejście:

- wskazać niezmienniki podobieństwa,
- wskazać typy macierzy, do których chcemy *upodabniać* inne,
- wskazać związki między postacią macierzy, a geometrią przekształceń,
- rozstrzygnąć na ile sama natura ciała K ma tu znaczenie.

Historycznie problem podobieństwa macierzy wywodzi się od Cachy'ego (1826), choć liczne idee pojawiły się wcześniej w pracach Kartezjusza, Eulera i innych. Zagadnienie to i związany z nim problem opisu wartości i wektorów własnych (dalej) ma fundamentalne znaczenie dla niemal wszystkich dziedzin matematyki i licznych zastosowań. Dziś poznamy jeden przykład takiego zastosowania.

Definicja

Śladem macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy sumę wyrazów stojących na przekątnej macierzy A, to znaczy element

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in K.$$

Definicja

Śladem macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy sumę wyrazów stojących na przekątnej macierzy A, to znaczy element

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in K.$$

Ćwiczenie

Jeśli macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne nad K, to:

- $r(A) = r(B)$,
- $\det(A) = \det(B)$,
- $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Wniosek

Jeśli A, B są macierzami tego samego endomorfizmu w pewnych bazach przestrzeni sk. wym. V, to $r(A) = r(B), \det(A) = \det(B), \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Wniosek

Jeśli A, B są macierzami tego samego endomorfizmu w pewnych bazach przestrzeni sk. wym. V, to $r(A) = r(B), \det(A) = \det(B), \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Definicja

Niech $\dim V < \infty$. **Wyznacznikiem endomorfizmu** $\phi : V \to V$ nazywamy element $\det(A) \in K$, gdzie $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, dla pewnej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V. Wyznacznik endomorfizmu oznaczamy $\det \phi$. **Śladem endomorfizmu** nazywamy element $tr(A) \in K$, gdzie $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, dla pewnej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V. Ślad endomorfizmu oznaczamy $\operatorname{tr} \phi$.

Wniosek

Jeśli A, B są macierzami tego samego endomorfizmu w pewnych bazach przestrzeni sk. wym. V, to $r(A) = r(B), \det(A) = \det(B), \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Definicja

Niech $\dim V < \infty$. **Wyznacznikiem endomorfizmu** $\phi : V \to V$ nazywamy element $\det(A) \in K$, gdzie $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, dla pewnej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V. Wyznacznik endomorfizmu oznaczamy $\det \phi$. **Śladem endomorfizmu** nazywamy element $tr(A) \in K$, gdzie $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, dla pewnej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V. Ślad endomorfizmu oznaczamy $\operatorname{tr} \phi$.

Ćwiczenie

Warunki $r(A) = r(B), \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B), \det A = \det B$ nie implikują podobieństwa A, B.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$.
Wektor $\alpha \in V$ nazywamy **wektorem własnym** endomorfizmu ϕ jeśli:

- $\alpha \neq 0$,
- istnieje $\lambda \in K$ takie, ze $\phi(\alpha) = \lambda\alpha$.

Wówczas element $\lambda \in K$ nazywamy **wartością własną** endomorfizmu ϕ,
zaś o wektorze α mówimy, że jest wektorem własnym o wartości własnej λ.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$.
Wektor $\alpha \in V$ nazywamy **wektorem własnym** endomorfizmu ϕ jeśli:

- $\alpha \neq 0$,
- istnieje $\lambda \in K$ takie, ze $\phi(\alpha) = \lambda\alpha$.

Wówczas element $\lambda \in K$ nazywamy **wartością własną** endomorfizmu ϕ, zaś o wektorze α mówimy, że jest wektorem własnym o wartości własnej λ.

Definicja

Niech $A \in M_n(K)$. Mówimy, że $\lambda \in K$ jest **wartością własną macierzy** A, jeśli λ jest wartością własną endomorfizmu $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ zadanego wzorem $M(\phi)_{st}^{st} = A$.
Niezerowy wektor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in K^n$ nazwiemy **wektorem własnym macierzy** A o wartości własnej λ, jeśli

$$A \cdot v^T = \lambda \cdot v^T.$$

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane macierzą:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane macierzą:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znalezienie wektorów i wartości własnych endomorfizmu ϕ (lub macierzy $M(\phi)_{st}^{st}$) sprowadza się do dyskusji rozwiązywalności układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix},$$

czyli równoważnie do rozwiązania układu jednorodnego o macierzy $M(\phi)_{st}^{st} - \lambda I$ postaci:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Wniosek

Niech ϕ będzie endomorfizmem sk. wym. przestrzeni V i niech $A = M(\phi)_{st}^{st}$. Następujące warunki są równoważne:

- λ jest wartością własną ϕ,
- macierz $A - \lambda I$ jest nieodwracalna,
- $\det(A - \lambda I) = 0$.

Wniosek

Niech ϕ będzie endomorfizmem sk. wym. przestrzeni V i niech $A = M(\phi)_{st}^{st}$. Następujące warunki są równoważne:

- λ jest wartością własną ϕ,
- macierz $A - \lambda I$ jest nieodwracalna,
- $\det(A - \lambda I) = 0$.

Definicja-uwaga

Jeśli a jest wartością własną endomorfizmu $\phi \in \mathrm{End}(V)$, to zbiór

$$V_{(a)} = \{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) = a\alpha\} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})$$

jest podprzestrzenią liniową w V, którą nazywamy **podprzestrzenią własną** V odpowiadającą wartości własnej a.

Aby znaleźć wartości własne i wektory własne $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ (odp. macierzy A) rozwiązujemy równanie

$$\det(M(\phi)_{st}^{st} - \lambda I) = 0 \quad \text{(odpowiednio} \det(A - \lambda I) = 0)$$

i dla każdego pierwiastka $\lambda = a$ znajdujemy przestrzeń $V_{(a)}$ rozwiązań układu o macierzy $M(\phi)_{st}^{st} - \lambda I$ (odpowiednio $A - aI$).

Aby znaleźć wartości własne i wektory własne $\phi \in \operatorname{End}(K^n)$ (odp. macierzy A) rozwiązujemy równanie

$$\det(M(\phi)_{st}^{st} - \lambda I) = 0 \quad (\text{odpowiednio} \det(A - \lambda I) = 0)$$

i dla każdego pierwiastka $\lambda = a$ znajdujemy przestrzeń $V_{(a)}$ rozwiązań układu o macierzy $M(\phi)_{st}^{st} - \lambda I$ (odpowiednio $A - aI$). Wprowadzamy następujący fundamentalny niezmiennik.

Definicja

Niech $\phi \in \operatorname{End}(V)$, gdzie V jest przestrzenią sk. wymiarową nad ciałem K. **Wielomianem charakterystycznym** endomorfizmu ϕ nazywamy

$$w_\phi(\lambda) = \det(M(\phi)_{st}^{st} - \lambda I) \in K[\lambda].$$

Dla macierzy $A \in M_n(K)$ **wielomianem charakterystycznym macierzy** A nazywamy:

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \in K[\lambda].$$

Kontynuacja przykładu: dla endomorfizmu $\mathbb{R}^3$ zadanego wzorem:

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3)$$

mamy:

$$w_\phi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2.$$

Stąd

- wartościami własnymi ϕ są -1 oraz 5,
- po rozwiązaniu układów o macierzach $M(\phi)_{st}^{st} + I$ oraz $M(\phi)_{st}^{st} - 5I$ mamy:

$$V_{(-1)} = \text{lin}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)), \quad V_{(5)} = \text{lin}((1, 1, 1)).$$

Kontynuacja przykładu: dla endomorfizmu $\mathbb{R}^3$ zadanego wzorem:

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3)$$

mamy:

$$w_\phi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2.$$

Stąd

- wartościami własnymi ϕ są -1 oraz 5,
- po rozwiązaniu układów o macierzach $M(\phi)_{st}^{st} + I$ oraz $M(\phi)_{st}^{st} - 5I$ mamy:

$$V_{(-1)} = \mathrm{lin}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)), \quad V_{(5)} = \mathrm{lin}((1, 1, 1)).$$

- Swoją drogą $\mathcal{A} = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$ jest bazą $\mathbb{R}^3$. Mamy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Podstawowe uwagi (każdy musi umieć je sam udowodnić):

- jeśli V jest wymiaru n oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$, to $w_\phi(\lambda)$ jest stopnia n oraz wartości własne ϕ są pierwiastkami równania $w_\phi(\lambda) = 0$,

Podstawowe uwagi (każdy musi umieć je sam udowodnić):

- jeśli V jest wymiaru n oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$, to $w_\phi(\lambda)$ jest stopnia n oraz wartości własne ϕ są pierwiastkami równania $w_\phi(\lambda) = 0$,
- wielomian charakterystyczny nie zależy od wyboru bazy, tzn. dla dowolnej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V mamy:

$$w_\phi(\lambda) = \det(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} - \lambda I),$$

Podstawowe uwagi (każdy musi umieć je sam udowodnić):

- jeśli V jest wymiaru n oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$, to $w_\phi(\lambda)$ jest stopnia n oraz wartości własne ϕ są pierwiastkami równania $w_\phi(\lambda) = 0$,
- wielomian charakterystyczny nie zależy od wyboru bazy, tzn. dla dowolnej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V mamy:
$$w_\phi(\lambda) = \det(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} - \lambda I),$$
- jeśli macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne nad K oraz $A = M(\phi)_{st}^{st}$, $B = M(\psi)_{st}^{st}$, to
$$w_\phi(\lambda) = w_\psi(\lambda),$$

Podstawowe uwagi (każdy musi umieć je sam udowodnić):

- jeśli V jest wymiaru n oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$, to $w_\phi(\lambda)$ jest stopnia n oraz wartości własne ϕ są pierwiastkami równania $w_\phi(\lambda) = 0$,
- wielomian charakterystyczny nie zależy od wyboru bazy, tzn. dla dowolnej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V mamy:

$$w_\phi(\lambda) = \det(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} - \lambda I),$$

- jeśli macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne nad K oraz $A = M(\phi)_{st}^{st}$, $B = M(\psi)_{st}^{st}$, to

$$w_\phi(\lambda) = w_\psi(\lambda),$$

- jeśli $A = M(\phi)_{st}^{st} \in M_n(K)$, to:

$$w_\phi(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} tr(A) \lambda^{n-1} + \ldots + \det A.$$

Definicja

Macierz $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy **diagonalną**, jeśli $a_{ij} = 0$, dla $i \neq j$.

Definicja

Macierz $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy **diagonalną**, jeśli $a_{ij} = 0$, dla $i \neq j$.

Uwaga

Niech V będzie przestrzenią wymiaru n nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ma bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ złożoną z wektorów własnych α_i o wartościach własnych a_i, dla $i = 1, \ldots, n$. Wówczas $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej liczby $a_1, \ldots, a_n$.

Definicja

Macierz $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy **diagonalną**, jeśli $a_{ij} = 0$, dla $i \neq j$.

Uwaga

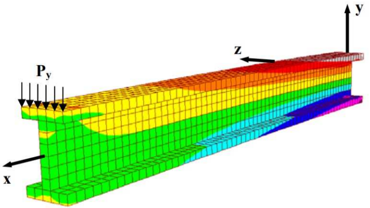
Niech V będzie przestrzenią wymiaru n nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ma bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ złożoną z wektorów własnych α_i o wartościach własnych a_i, dla $i = 1, \ldots, n$. Wówczas $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej liczby $a_1, \ldots, a_n$.

Definicja

Endomorfizm ϕ skończenie wymiarowej przestrzeni V nad ciałem K nazywamy **diagonalizowalnym nad ciałem** K wtedy i tylko wtedy, gdy w pewnej bazie V ma on macierz diagonalną. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy **diagonalizowalną nad ciałem** K, jeśli jest ona podobna nad K do macierzy diagonalnej.

Następnym razem:

- kiedy macierz/endomorfizm jest diagonalizowalna/y nad ciałem,
- co robić gdy nie ma diagonalizowalności.



Kierunki główne napięć działających na belkę wspornikową. Źródło:
AJ Jiménez, *Application of Matrix Diagonalization in Engineering: Stress Matrix*.