

Zestaw zadań domowych 6

Data zwrotu: 19 stycznia 2021, 14:15 (Moodle:

<https://moodle.mimuw.edu.pl/course/view.php?id=783>).

Uwaga: Proszę, aby każde rozwiązanie zamieszczone było na **osobnej kartce** (kartkach). Każda kartka powinna być **podpisana** imieniem, nazwiskiem, numerem grupy. Rozwiązania należy zeskanować (wystarczy zdjęcie przy pomocy aplikacji typu CamScanner) i przekonwertować do formatu pdf.

Zadanie 1. Znaleźć bazę $(\mathbb{R}^3)^*$ sprzężoną do bazy $\{(1, 2, 2), (2, 5, 5), (1, 3, 4)\}$. Wyznaczyć współrzędne funkcjonału $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2 + x_3$ w tej bazie.

Zadanie 2. Sprawdzić, że funkcjonały

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 - 2x_2,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - x_3,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + x_3$$

tworzą bazę $(\mathbb{R}^3)^*$ i znaleźć taką bazę $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ przestrzeni \mathbb{R}^3 , by baza sprzężona $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ spełniała warunki $\alpha_i^* = f_i$, dla $i = 1, 2, 3$.

Zadanie 3. Przedstawić macierz A w postaci iloczynu macierzy operacji elementarnych, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Podać przykład macierzy $B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, że $\det(AB) = 7$.

Zadanie 4. Obliczyć wyznacznik macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, gdzie:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i \text{ lub } j \text{ jest równe } 1, \\ 1, & \text{gdy } i \neq j \text{ oraz } 1 < i, j < n, \\ n, & \text{gdy } (i, j) = n, \\ 2, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Jest to zatem, dla $n \geq 2$, macierz postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & n \end{bmatrix}.$$