

9. Przestrzenie liniowe i podprzestrzenie. Kombinacje liniowe.

Zadanie 1. Niech $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Zdefiniujmy dodawanie \oplus elementów zbioru X oraz mnożenie \odot elementów zbioru X przez liczby rzeczywiste wzorami $x \oplus y = xy$ oraz $\lambda \odot x = x^\lambda$. Wykaż, że trójka (X, \oplus, \odot) jest przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{R} .

Zadanie 2. Niech $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Zdefiniujmy dodawanie \oplus w V wzorem $z_1 \oplus z_2 = z_1 z_2$. Wykaż, że jeżeli K jest (dowolnym) ciałem, to nie istnieje takie mnożenie \odot elementów zbioru V przez skalary z K , aby trójka (V, \oplus, \odot) była przestrzenią liniową nad K .

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{C}$ zbiór rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} 3x + (1 - t^2)y^3 - z = 0 \\ x - 5y + (2t + 2)|z| = t^3 - t \end{cases}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni \mathbb{C}^3 ?

Zadanie 4. Załóżmy, że U oraz V są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej X spełniającymi $X = U \cup V$. Udowodnij, że wtedy $U = X$ lub $V = X$.

Zadanie 5. Niech $K = \mathbb{Z}_2$. Ile podprzestrzeni ma przestrzeń liniowa K^3 ? Opisz każdą z nich układem równań liniowych.

Zadanie 6. Czy wektor $v = (1, 1, 1) \in \mathbb{Q}^3$ należy do przestrzeni liniowej nad \mathbb{Q} rozpinanej przez wektory $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ oraz $v_3 = (2, 5, 3)$? To samo pytanie dla wektora $w = (1, 4, 3) \in \mathbb{Q}^3$.

Zadanie 7. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ wektor $v = (-2, t, -1, 7) \in \mathbb{R}^4$ jest kombinacją liniową wektorów $v_1 = (1, 2, -1, 3)$, $v_2 = (1, 0, 2, 2)$ oraz $v_3 = (-1, 3, 1, 1)$?

Zadanie 8. Podaj przykład wektora $v \in \mathbb{R}^4$, który nie leży w przestrzeni $\text{lin}((1, 3, 1, 3), (3, 8, 2, 9), (0, 3, 2, 3))$.

Zadanie 9. Rozważmy przestrzeń ciągów $V = \mathbb{R}^\infty$ o wyrazach rzeczywistych. Niech $e_n \in V$ dla $n \in \mathbb{N}$ będzie ciągiem, którego n -ty wyraz równy jest 1, zaś pozostałe wyrazy równe są zeru. Opisz podprzestrzeń $\text{lin}(e_n : n \in \mathbb{N})$.