6. Ciało liczb zespolonych – równania wielomianowe

Zadanie domowe 1. *Niech* $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{(\sqrt{3}-i)^m}$, *dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych* m, n. *Wyznacz warunek konieczny i dostateczny do tego, by* $Im(z) = 0$.

Zadanie domowe 2. *Znajdź pierwiastki zespolone:*

(b) *stopnia 6 z liczby* $-27i$,

(c) *stopnia 3 z liczby* $5 + 5i$.

Zadanie 1. *Załóżmy, że liczba* $0 \neq z \in \mathbb{C}$ *spełnia równanie* $z + 1/z = 2\cos\phi$, *gdzie* $\phi \in \mathbb{R}$. *Oblicz* $z^n + 1/z^n$ *dla dowolnego* $n \geqslant 1$.

Zadanie 2. *Rozwiąż równania w liczbach zespolonych:*

(a) $x^2 + 4x + 5 = 0$,

(b) $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$.

Zadanie 3. *Dla każdego z poniższych wielomianów znaleźć wszystkie jego pierwiastki, rozłożyć ten wielomian nad* $\mathbb{C}$ *na czynniki stopnia 1 oraz rozłożyć go nad* $\mathbb{R}$ *na czynniki stopnia* $\leqslant 2$.

(a) $z^7 + 8z^4 + 4z^3 + 32 = 0$,

(b) $z^{10} + z^5 + 1 = 0$,

(c) $z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25 = 0$.

Zadanie 4. *Liczba* $\cos\phi + i \cdot \sin\phi$ *spełnia równanie* $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, *gdzie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. *Wykaż, że:*

$$a_1 \sin\phi + a_2 \sin 2\phi + \ldots + a_n \sin n\phi = 0.$$

Zadanie 5. *Niech* $\{1, z_1, \ldots, z_{2016}\}$ *będzie zbiorem zespolonych pierwiastków stopnia* 2017 *z liczby 1. Pokazać, że* $\prod_{k=1}^{2016} (1 - z_k) = 2017$.

Zadanie 6. *Wyznacz wszystkie pierwiastki* $z \in \mathbb{C}$ *równania* $8z^4(z^2 + 1) = z^{10} + 1$ *spełniające* $|z| = 1$.