

6. Ciało liczb zespolonych – postać trygonometryczna

Zadanie domowe 1. Pokaż, że dla dowolnej liczby zespolonej z :

- a) $\operatorname{Im}(z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = \bar{z}$,
- b) $\operatorname{Re}(z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{z} = -z$,
- c) $|z| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z\bar{z} = 1$.

Zadanie domowe 2. Wyznacz wszystkie liczby zespolone $z \neq 0$, dla których $z + 1/z \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1. Liczby zespolone z_1, z_2 spełniają równość $|z| = 1$. Pokaż, że liczba $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ jest rzeczywista.

Zadanie 2. Przedstaw w postaci algebraicznej:

$$(\sqrt{3} - i)^{32}, \quad \frac{(1 - i)^4 - i}{(1 + i)^4 + i}, \quad \frac{(1 + i\sqrt{3})^{27}}{(1 - i)^{26}}, \quad \left(i\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{16}.$$

Zadanie 3. Niech $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{(\sqrt{3}-i)^m}$, dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych m, n . Wyznacz warunek konieczny i dostateczny do tego, by $\operatorname{Im}(z) = 0$.

Zadanie 4. Znajdź pierwiastki zespolone:

- (a) stopnia 4 z liczby $-\sqrt{3} + 3i$,
- (b) stopnia 6 z liczby $-27i$,
- (c) stopnia 3 z liczby $5 + 5i$.

Zadanie 5. Rozwiąż równania w liczbach zespolonych:

- (a) $z^7 + 8z^4 + 4z^3 + 32 = 0$,
- (b) $z^{12} - z^{10} + 4z^8 + 60z^6 - 64z^4 + 256z^2 - 256 = 0$,
- (c) $z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25 = 0$.

Zadanie 6. Oblicz:

$$\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2} + (-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^7}{(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^{11}}}.$$

Zadanie 7. W zależności od $n \in \mathbb{N}$ oraz dla tych $x \in \mathbb{R}$, dla których to jest możliwe, wyznacz postać trygonometryczną liczby

$$z = \frac{(1 + i \cos(x) + \sin(x))^n}{(1 - i \cos(x) + \sin(x))^n}.$$