4. Układy równań o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_p$. Ciała

Zadanie domowe 1. *Rozwiąż poniższy układ równań osobno nad ciałem $\mathbb{Z}_3$, a osobno nad ciałem $\mathbb{Z}_5$:*

$$\begin{cases} x + 2z &= 1 \\ y + 2z &= 2 \cdot \\ 2x + z &= 1 \end{cases}$$

Zadanie domowe 2. *Rozwiąż poniższy układ równań osobno nad ciałem $\mathbb{Z}_5$, a osobno nad ciałem $\mathbb{Z}_7$:*

$$\begin{cases} 3x + y + 2x &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 1 \cdot \\ 4x + 3y + 2z &= 1 \end{cases}$$

Zadanie domowe 3. *Znaleźć rozwiązanie ogólne następującego układu równań liniowych o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1. \end{cases}$$

Zadanie 1. *Niech p będzie liczbą pierwszą. Rozwiąż układ równań*

$$\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 3x + 6y = 1 \end{cases}$$

w ciele $\mathbb{Z}_p$. Wynik podaj w postaci pary (x, y), gdzie $x, y \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Zadanie 2. *Pokaż, że każdy niezerowy element ciała $\mathbb{Z}_7$ jest postaci 3^n, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Czy każdy niezerowy element ciała $\mathbb{Z}_{11}$ też jest tej postaci? Jeśli nie, to czy istnieje taki element $a \in \mathbb{Z}_{11}$, że każdy niezerowy element w $\mathbb{Z}_{11}$ jest postaci a^n, dla $n \in \mathbb{N}$? Jeśli istnieje takie a, to ile jest elementów w $\mathbb{Z}_{11}$ o tej własności co a?*

Zadanie 3. *Wykaż, że w każdym ciele K zachodzi $a \cdot 0 = 0$.*

Zadanie 4. *Wykaż, że w każdym ciele K równośc $x + y = x + z$, dla pewnych $x, y, z \in K$, implikuje $y = z$.*

Zadanie 5. *Wykaż, że żaden właściwy podzbiór zbioru $\mathbb{Q}$ nie jest podciałem ciała $\mathbb{Q}$.*

Zadanie 6. *Wykaż, że w każdym ciele K spełniającym $|K| = 4$ zachodzi $1 + 1 = 0$.*

Zadanie 7. *Wykaż, że w ciele o czterech elementach $\{0, 1, a, b\}$ mamy równość $a + 1 = b$.*