3. Układy równań o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_p$.

Zadanie domowe 1. *Dla jakich wartości parametru λ układ:*

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 & = 1 \end{cases}$$

- *nie ma rozwiązań,*
- *ma dokładnie jedno rozwiązanie,*
- *ma nieskończenie wiele rozwiązań.*

Zadanie domowe 2. *Ciągi* $(1, 2, 3, 4)$ *oraz* $(2, 0, 0, 1)$ *są rozwiązaniami pewnego u. r. l. nad* $\mathbb{R}$*. Opisz wszystkie rozwiązania zakładając, że macierz tego układu po sprowadzeniu do postaci schodkowej ma trzy schodki.*

Zadanie domowe 3. *Niech* $n \geqslant 4$*. Rozwiąż układ równań*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = 0 \quad (2 \leqslant i \leqslant n-2) \\ x_{n-1} + x_n = 0. \end{cases}$$

Zadanie 1. *Znajdź układ równań liniowych nad* $\mathbb{R}$*, którego wszystkie rozwiązania są postaci*

$$(-2t + 3, -t + 2, t + 1, 2t) \quad \text{dla} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 2. *Niech* U *będzie układem trzech równań liniowych (nad* $\mathbb{R}$*) o czterech niewiadomych. Załóżmy, że układ równań* V *powstaje z* U *przez zastąpienie każdego równania w* U *sumą dwóch pozostałych. Zbadaj czy układy równań* U *oraz* V *są zawsze równoważne.*

Zadanie 3. *Rozwiąż równania w podanych ciałach:*

(a) $4x + 3 = 0$ *w* $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{13}$.

(b) $x^2 = 2$ *w* $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$.

(c) $x^2 + x + 1 = 0$ *w* $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_7$.

Zadanie 4. *Rozwiąż poniższy układ równań osobno nad ciałem* $\mathbb{Z}_3$*, a osobno nad ciałem* $\mathbb{Z}_5$*:*

$$\begin{cases} x + 2z & = 1 \\ y + 2z & = 2\,\cdot \\ 2x + z & = 1 \end{cases}$$

Zadanie 5. *Rozwiąż poniższy układ równań osobno nad ciałem* $\mathbb{Z}_5$*, a osobno nad ciałem* $\mathbb{Z}_7$*:*

$$\begin{cases} 3x + y + 2x & = 1 \\ x + 2y + 3z & = 1\,\cdot \\ 4x + 3y + 2z & = 1 \end{cases}$$

Zadanie 6. *Znaleźć rozwiązanie ogólne następującego układu równań liniowych o współczynnikach w* $\mathbb{Z}_5$*:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 & = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 & = 1. \end{cases}$$

Zadanie 7. *Niech* p *będzie liczbą pierwszą. Rozwiąż układ równań*

$$\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 3x + 6y = 1 \end{cases}$$

w ciele $\mathbb{Z}_p$*. Wynik podaj w postaci pary* (x, y)*, gdzie* $x, y \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$*.*

Zadanie 8. *Pokaż, że każdy niezerowy element ciała* $\mathbb{Z}_7$ *jest postaci* 3^n*, dla pewnego* $n \in \mathbb{N}$*. Czy każdy niezerowy element ciała* $\mathbb{Z}_{11}$ *też jest tej postaci? Jeśli nie, to czy istnieje taki element* $a \in \mathbb{Z}_{11}$*, że każdy niezerowy element w* $\mathbb{Z}_{11}$ *jest postaci* a^n*, dla* $n \in \mathbb{N}$*? Jeśli istnieje takie* a*, to ile jest elementów w* $\mathbb{Z}_{11}$ *o tej własności co* a*?*