GAL I (grupa 1),

Zastosowania wyznaczników.

Zadanie 1. *Udowodnij, że równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty* $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ *w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *dane jest wzorem:*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Zadanie 2. *Jeśli* a_1, a_2 *są różnymi liczbami zespolonymi, wówczas prosta przechodząca przez te punkty opisana jest przez liczby zespolone* z *spełniające:*

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a_1 & \overline{a_1} & 1 \\ a_2 & \overline{a_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zadanie 3. *Pokazać, że jeśli* a_1, a_2, a_3 *są parami różnymi punktami na płaszczyźnie zespolonej, to okrąg przechodzący przez te punkty złożony jest z punktów* z *spełniających równość:*

$$\begin{vmatrix} z\overline{z} & z & \overline{z} & 1 \\ a_1\overline{a_1} & a_1 & \overline{a_1} & 1 \\ a_2\overline{a_2} & a_2 & \overline{a_2} & 1 \\ a_3\overline{a_3} & a_3 & \overline{a_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Niech s *będzie środkiem tego okręgu opisanego, a* r *– promieniem. Wówczas:*

$$s = -\frac{\begin{vmatrix} a_1\overline{a_1} & a_1 & 1 \\ a_2\overline{a_2} & a_2 & 1 \\ a_3\overline{a_3} & \overline{a_3} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & \overline{a_1} & 1 \\ a_2 & \overline{a_2} & 1 \\ a_3 & \overline{a_3} & 1 \end{vmatrix}}, \quad r = \frac{\left\|\begin{matrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} a_1 & \overline{a_1} & 1 \\ a_2 & \overline{a_2} & 1 \\ a_3 & \overline{a_3} & 1 \end{matrix}\right\|}$$

Zadanie 4. *Niech* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *będą liczbami zespolonymi o tej własności, że dla każdej liczby całkowitej* $k > 0$ *zachodzi równość* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0$*. Pokazać, że* $\lambda_i = 0$*, dla* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

Zadanie 5. *Pokazać, że dla dowolnych liczb całkowitych* $a_1, \ldots, a_n$ *liczba* $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{a_i - a_j}{i - j}$ *jest całkowita.*