GAL I (grupa 1),

Macierz odwrotna. Wzory Cramera. Wzór permutacyjny.

Zadanie 1. *Dla każdej z poniższych macierzy znaleźc macierz odwrotną:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. *Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ poniższa macierz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & s & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

jest odwracalna? Dla każdego takiego s znaleźć A^{-1}.

Zadanie 3. *Przedyskutować rozwiązywalność następującego układu równań w zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} 3x + z & = 1 \\ mx - my + z & = -m \\ x + my + z & = 3 \end{cases} \cdot$$

Dla tych m, dla których istnieją rozwiązania, wyznaczyć je.

Zadanie 4. *Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi. Przeprowadzić dyskusję rozwiązywalności układu równań liniowych:*

$$\begin{cases} (b+c)x + by + cz = 1 \\ ax + (c+a)y + cz = 1 \\ ax + by + (a+b)z = 1 \end{cases} \cdot$$

Zadanie 5. *Korzystając z definicji permutacyjnej wyznacznika oblicz:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 6. *Wykaż, że jeśli w macierzy $n \times n$ na przecięciu k wierszy i l kolumn znajdują się same zera, przy czym $k + l > n$, to wyznacznik tej macierzy jest równy* 0.

Zadanie 7. *Załóżmy, że $n \geqslant 1$ jest liczbą nieparzystą.*

1. *Dowiedź, że gdy permutacja $\sigma \in S_n$ spełnia równość $\sigma^2 = \mathrm{id}$, to σ ma punkt stały (tzn. istnieje takie $k \in \{1, \dots, n\}$, że $\sigma(k) = k$).*

2. *Wywnioskuj z punktu (1), że gdy macierz symetryczna $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ spełnia $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ dla $i \neq j$ oraz $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$, to $\det A \in \mathbb{Z}$ jest liczbą parzystą.*