GAL I (grupa 1),

Wyznaczniki - rozwinięcie Laplace'a, wzór Cauchy'ego

Zadanie domowe 1. *Oblicz wyznaczniki macierzy o wyrazach z* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 1. *Przy pomocy indukcji, rozwinięcia Laplace'a oblicz wyznaczniki następujących macierzy* $n \times n$*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2. *Dla dowolnych* $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in K$ *oblicz wyznacznik macierzy* $n \times n$ *postaci:*

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3. *Wyrazami macierzy kwadratowej* A *należącej do* $M_4(\mathbb{R})$ *są tylko liczby* -2 *oraz* 1 *(dowolnie ustawione). Pokazać, że wyznacznik macierzy* A *jest liczbą całkowitą podzielną przez 27.*

Zadanie 4. *Obliczyć* $\det(A \cdot B), \det(A+B), \det(A^7), \det(A^3 \cdot B^9)$ *dla poniższych macierzy:*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. *Niech* $A \in M_{m \times n}(K)$ *oraz* $B \in M_{n \times m}(K)$*. Wykazać, że jeśli* $m > n$*, to* $\det(A \cdot B) = 0$.

Zadanie 6. *Korzystając z własności macierzy* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *uzasadnić, że wyrazy* $F_0, F_1, \dots$ *ciągu Fibonacciego spełniają dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *równość* $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.