

## 2. Układy równań o współczynnikach rzeczywistych

**Zadanie 1.** Rozwiąż układy równań:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 1 \\ 7x + 8y + 9z = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ 3x + 2y + 4z = -3. \end{cases}$$

**Zadanie 2.** Czwórka liczb rzeczywistych  $(a, b, c, d)$  jest rozwiązaniem układu równań liniowych  $U_1$ . Czy wynika stąd, że czwórka  $(-a, -2b, -3c, -4d)$  jest rozwiązaniem układu równań liniowych  $U_2$ , gdzie

$$U_1 : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}, \quad U_2 : \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_4 = 0 \end{cases} ?$$

**Zadanie 3.** W zależności od wartości parametru  $k$  określ kiedy poniższy układ równań: nie ma rozwiązań, ma dokładnie jedno rozwiązanie, ma nieskończenie wiele rozwiązań:

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + y = 1 \end{cases}.$$

**Zadanie 4.** Znajdź wielomian  $f(x)$  stopnia 3 spełniający warunki:

$$f(-2) = 1, \quad f(-1) = 3, \quad f(1) = 13, \quad f(2) = 33.$$

**Zadanie 5.** Dla jakich wartości parametru  $\lambda$  układ:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

- nie ma rozwiązań,
- ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- ma nieskończenie wiele rozwiązań.

**Zadanie 6.** Znajdź układ równań liniowych nad  $\mathbb{R}$ , którego wszystkie rozwiązania są postaci

$$(-2t + 3, -t + 2, t + 1, 2t) \quad \text{dla} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Zadanie 7.** Niech  $U$  będzie układem trzech równań liniowych (nad  $\mathbb{R}$ ) o czterech niewiadomych. Załóżmy, że układ równań  $V$  powstaje z  $U$  przez zastąpienie każdego równania w  $U$  sumą dwóch pozostałych. Zbadaj czy układy równań  $U$  oraz  $V$  są zawsze równoważne.

Do domu:

**Zadanie domowe 1.** Wyznacz rozwiązania układów równań liniowych, danych przez macierze:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2b \\ 1 & a & 1 & 2b \\ a & 1 & 1 & b \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \end{array} \right]$$

w zależności od parametrów  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**Zadanie domowe 2.** Ciągi  $(1, 2, 3, 4)$  oraz  $(2, 0, 0, 1)$  są rozwiązaniami pewnego u. r. l. nad  $\mathbb{R}$ . Opisz wszystkie rozwiązania zakładając, że macierz tego układu po sprowadzeniu do postaci schodkowej ma trzy schodki.

**Zadanie domowe 3.** Niech  $n \geq 4$ . Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = 0 \quad (2 \leq i \leq n-2) \\ x_{n-1} + x_n = 0. \end{cases}$$