

GAL I (grupa 1),

Przestrzeń sprzężona i wprowadzenie do wyznaczników

Zadanie 1. Znaleźć bazę $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*\}$ przestrzeni $(\mathbb{R}^3)^*$ sprzężoną do bazy $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ przestrzeni \mathbb{R}^3 , gdzie $\alpha_1 = (1, 2, 2)$, $\alpha_2 = (2, 5, 5)$, $\alpha_3 = (1, 3, 4)$.

Zadanie 2. Niech $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 - 3x_3$ będzie funkcjonałem na \mathbb{R}^3 . Znaleźć współrzędne f w bazie sprzężonej do bazy standardowej \mathbb{R}^3 oraz w bazie sprzężonej do bazy $\{(2, 0, 0), (1, 2, 0), (0, 1, 2)\}$.

Zadanie 3. W \mathbb{R}^3 dany jest układ wektorów $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, gdzie

$$\alpha_1 = (1, 1, -1), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 2, 1).$$

Znaleźć współrzędne funkcjonału $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 3x_3$ w bazie \mathcal{A}^* sprzężonej do \mathcal{A} . Znaleźć wzór funkcjonału $g \in (\mathbb{R}^3)^*$ mającego w bazie \mathcal{A}^* współrzędne $1, -1, 1$ i wzory funkcjonałów f_1, f_2, f_3 takich, że $\mathcal{A}^* = (f_1, f_2, f_3)$.

Zadanie 4. Oblicz wyznaczniki macierzy o wyrazach z \mathbb{R} :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. Przy pomocy indukcji, rozwinięcia Laplace'a i wyników z poprzedniego zadania oblicz wyznaczniki następujących macierzy $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)^2 & 1 \end{vmatrix}$$