GAL I (grupa 1),

Przekształcenia liniowe cz. 1

Zadanie domowe 1. *Niech* $V = \mathrm{lin}((1,1,-2,-5),(1,2,-3,-8),(3,4,-7,-18)) \subseteq \mathbb{R}^4$ *i dla każdego* $s \in \mathbb{R}$ *niech* $W_s \subseteq \mathbb{R}^4$ *będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + sx_4 & = 0 \end{cases}$$

Dla jakich wartości $s \in \mathbb{R}$ *zachodzi* $\mathbb{R}^4 = V \oplus W_s$*?*

Zadanie domowe 2. *Rozważmy podprzestrzeń* W *macierzy rozmiarów* 2×2 *o współczynnikach rzeczywistych* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *złożoną z macierzy symetrycznych, których suma wyrazów na przekątnej równa jest zero. Niech* W' *będzie podprzestrzenią* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *złozona z macierzy, których pierwsza kolumna jest zerowa. Pokazać, że* $W \oplus W' = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Zadanie 1. *Dla jakich wartości parametru* $t \in \mathbb{R}$ *odwzorowanie* $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *opisane wzorem*

$$\phi((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2 + (t^2 - 9)x_1x_2, 5x_1 + 3(x_2 - 1) + t)$$

jest przekształceniem liniowym?

Zadanie 2. *Znaleźć wzory na przekształcenie liniowe* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *zadane następującymi warunkami:*
a) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \phi((3,1)) = (4,5,-1), \phi((7,2)) = (-3,0,5)$,
b) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \phi((1,2,1)) = (7,2), \phi((3,2,4)) = (20,17), \phi((5,1,2)) = (17,12)$,
c) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \phi((1,0,1)) = (5,1,3), \phi((0,1,1)) = (2,3,4), \phi((1,0,0)) = (6,7,7)$.

Zadanie 3. *Dla każdego z poniższych przekształceń znaleźć bazę i wymiar jego obrazu oraz bazę i wymiar jego jądra.*
a) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \phi((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 + x_2 - 3x_3, x_1 + 4x_2 + 2x_3)$,
b) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \phi((x_1,x_2,x_3)) = (4x_1 + 3x_2 + 5x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 + 3x_3, 6x_1 + 7x_2 + 7x_3)$,
c) $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \phi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4)$.

Zadanie 4. *Dla jakich wartości parametru* $r \in \mathbb{R}$ *przekształcenie:*
a) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, $\phi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1+x_2+2x_3, 2x_1+x_2+x_3, x_1+3x_2+rx_3, 5x_1+3x_2+4x_3, x_1+2x_2+5x_3)$ *jest monomorfizmem?*
b) $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\phi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (4x_1 + x_2 + rx_3 + x_4, 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4)$ *jest epimorfizmem?*

Zadanie 5. *W każdym z poniższych przypadków zbadać, czy istnieje przekształcenie liniowe* $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *spełniające zadane warunki. Jeśli tak to znaleźć przykład takiego* f *podając jego wzór.*
a) $\ker(\phi) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0\}, \mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}((2,3,1))$,
b) $\ker(\phi) = \mathrm{lin}((1,0,3,3)), \mathrm{im}(\phi) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0\}$,
c) $\ker(\phi) = \mathrm{lin}((1,1,1,1),(1,1,1,0)), \mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}((1,1,1),(1,1,0))$.