GAL I (grupa 1),

Operacje na podprzestreniach

Zadanie 1. *Niech* $V_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ *będzie podprzestrzenią opisaną równaniem* $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ *i niech* $V_2 = \operatorname{lin}((2, -t+2, 4), (2s, 6, -8)) \subseteq \mathbb{R}^3$. *Dla jakich wartości parametrów* $s, t \in \mathbb{R}$ *mamy*
a) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, *b)* $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$, *c)* $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$*?*

Zadanie 2. *Pokazać, że* $V_1 \oplus V_2 = V$, *gdzie:*
a) $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, V_1 *- funkcje parzyste,* V_2 *- funkcje nieparzyste,*
b) $V = M_{n\times n}(K)$, V_1 *- macierze symetryczne, czyli* $A = A^T$, V_2 *- macierze antysymetryczne* $A = -A^T$,
c) V *- ciągi zbieżne o wyrazach rzeczywistych,* V_1 *- ciągi zbieżne do zera,* $V_2 =$???,
d) $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $V_1 = f \in V : f(0) = 0\}$, $V_2 =$???

Zadanie 3. *Niech* V *będzie* 7*-wymiarową przestrzenią liniową zawierajacą dwie* 5*-wymiarowe podprzestrzenie* V_1, V_2 *spełniające warunek* $\dim(V_1 \cap V_2) = 3$. *Czy dla każdego wektora* $\alpha \in V$ *istnieją wektory* $\beta \in V_1, \gamma \in V_2$, *że* $\alpha = \beta + \gamma$*?*

Zadanie 4. *Niech* $V = \operatorname{lin}((1, 1, -2, -5), (1, 2, -3, -8), (3, 4, -7, -18)) \subseteq \mathbb{R}^4$ *i dla każdego* $s \in \mathbb{R}$ *niech* $W_s \subseteq \mathbb{R}^4$ *będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + sx_4 & = 0 \end{cases}$$

Dla jakich wartości $s \in \mathbb{R}$ *zachodzi* $\mathbb{R}^4 = V \oplus W_s$?

Zadanie 5. *Niech* $A = \operatorname{lin}(-2, 1, 0, -3), (2, -1, 1, 3))$. *Znajdź takie podprzestrzenie* A *i* B *przestrzeni* $\mathbb{R}^4$, *by* $\mathbb{R}^4$ *było sumą prostą* A *i* V, *a nie było sumą prostą podprzestrzeni* B *i* V *ani* A *i* B.

Zadanie 6. *Niech* $A = \operatorname{lin}((1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (2, 3, 4, 5)) \subseteq \mathbb{R}^4$. *Znajdź takie podprzestrzenie* $B, C \subseteq \mathbb{R}^4$, *że* $\mathbb{R}^4 = A \oplus B = B \oplus C = C \oplus A$ *lub wykaż, że takie podprzestrzenie nie istnieją.*

Zadanie 7. *Rozważmy podprzestrzeń* W *macierzy rozmiarów* 2×2 *o współczynnikach rzeczywistych* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *złożoną z macierzy symetrycznych, których suma wyrazów na przekątnej równa jest zero. Niech* W' *będzie podprzestrzenią* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *złozona z macierzy, których pierwsza kolumna jest zerowa. Pokazać, że* $W \oplus W' = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Zadanie 8. *Niech* V_1, V_2 *będą* n *wymiarowymi podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej* V. *Założmy, że układ* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ *jest bazą* V_1 *oraz układ* $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ *jest bazą* V_2. *Wykaż, że układ* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n\}$ *jest bazą* $V_1 + V_2$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. *Wykaż, że istnieje podprzestrzeń* W *przestrzeni* V *taka, że* $V_1 \oplus W = V_2 \oplus W = V$.