GAL I (grupa 1),

Rząd macierzy, twierdzenie Kroneckera-Capellego

Zadanie domowe 1. *Niech* $V = \operatorname{lin}((1,1,3,2),(4,5,2,5),(2,3,-4,1),(1,2,-5,5))$ *oraz* $\beta = (1,1,3,3)$. *Dla jakich* $r \in \mathbb{R}$ *istnieje baza* v_1, v_2, v_3, v_4 *przestrzeni* $\mathbb{R}^4$ *taka, że* v_1, v_2 *należą do* V *a przy tym* β *ma w tej bazie współrzędne* $(0,1,r,0)$*?*

Zadanie domowe 2. *Wyznacz rzędy macierzy:*

$$\begin{bmatrix} a & -b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & 3 \\ 2s & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & t+3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & t^2-2t & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 3 & -t & -2 \end{bmatrix}$$

w zależności od parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$ *oraz* $s, t \in \mathbb{C}$.

Zadanie 1. *Dla jakich* $x \in \mathbb{R}$ *zachodzi*

$$r \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix} = 3?$$

Zadanie 2. *Niech* $V = \operatorname{lin}((1,2,3,4),(2,3,4,5),(3,4,5,6),(1,1,2,3)) \subseteq \mathbb{R}^4$. *Znajdź układ równań liniowych opisujacych* V.

Zadanie 3. *Rozpatrzmy układ równań liniowych w* $\mathbb{R}^3$ *postaci:*

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = & 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 & = t \\ 5x_1 + sx_2 + 11x_3 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 & = 3 \end{cases}$$

Dla jakich s, t *układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie/nieskończenie wiele rozwiązań/brak rozwiązań?*

Zadanie 4. *Niech* $W = \operatorname{lin}((7,9,6,8),(11,u,12,u+1),(2,1,3,2),(3,-4,9,2)) \subseteq \mathbb{R}^4$. *Dla jakich wartości parametru* $u \in \mathbb{R}$ *można podprzestrzeń* W *opisać jednym równaniem liniowym?*

Zadanie 5. *Niech* A, B *będą macierzami o współczynnikach w ciele* K *mającymi tyle samo wierszy. Niech* $C = [A|B]$ *będzie macierzą otrzymaną przez dopisanie* B *z prawej strony do* A. *Wykazać, że:*

$$r(C) \leqslant r(A) + r(B).$$

Zadanie 6. *NIech* A, B *będą macierzami* $m \times n$ *o wyrazach z ciała* K. *Wykazać, że:*

$$r(A+B) \leqslant r(A) + r(B).$$

Zadanie 7. *Niech* $n \geqslant 1$ *oraz* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. *Rozważmy macierz* A *rozmiaru* $n! \times n$, *której wierszami są wszystkie możliwe permutacje ciągu* $a_1, \ldots, a_n$. *Wyznacz możliwe wartości liczby* $r(A)$.