GAL I (grupa 1),

Baza, wymiar, rząd macierzy

Zadanie domowe 1. *Niech* $W \subseteq \mathbb{R}^4$ *będzie opisane przez równania* $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ *oraz* $x_3 - x_4 = 0$. *Dopełnić bazę podprzestrzeni opisanej przez ten układ równań do bazy* $\mathbb{R}^4$.

Zadanie domowe 2. *Dopełnij układ wektorów* $(1, 2, 3, -2, -4), (6, 4, -5, -4, -1)$ *do bazy przestrzeni rozwiązań układu równań postaci:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0. \end{cases}$$

Zadanie 1. *Rozpatrzmy następujące wektory przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*:* $\alpha_1 = (3, 2, 1)$, $\alpha_2 = (7, 3, 1)$, $\alpha_3 = (4, 2, 1)$, $\beta_1 = (0, 2, 1)$, $\beta_2 = (1, 1, 2)$, $\beta_3 = (1, 0, 0)$.

a) Wykazać, że $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *jest bazą przestrzeni* $\mathbb{R}^3$. *Dla* $i = 1, 2, 3$ *znaleźć współrzędne* β_i *w tej bazie.*

b) Podać przykład takiej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, *że wektor* β_1 *ma w niej współrzędne* $1, 2, -1$ *a wektor* β_2 *ma współrzędne* $0, 0, 1$.

c) Czy istnieje taka baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$, *w której wektor* β_1 *ma współrzędne* $1, 1, 0$, *wektor* β_2 *ma współrzędne* $0, 0, 1$, *a wektor* β_3 *ma wspórzędne* $1, 1, 1$*?*

Zadanie 2. *Niech* $V = \operatorname{lin}((1, 1, 3, 2), (4, 5, 2, 5), (2, 3, -4, 1), (1, 2, -5, 5))$ *oraz* $\beta = (1, 1, 3, 3)$. *Dla jakich* $r \in \mathbb{R}$ *istnieje baza* v_1, v_2, v_3, v_4 *przestrzeni* $\mathbb{R}^4$ *taka, że* v_1, v_2 *należą do* V *a przy tym* β *ma w tej bazie współrzędne* $(0, 1, r, 0)$*?*

Zadanie 3. *Niech* $V = \operatorname{lin}((1, 2, -1, 4) \subseteq \mathbb{R}^4$. *Znajdź układ 3 równań liniowych opisujacych* V.

Zadanie 4. *Niech* $V = \operatorname{lin}((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6), (1, 1, 2, 3)) \subseteq \mathbb{R}^4$. *Znajdź układ równań liniowych opisujacych* V.

Zadanie 5. *Wyznacz rzędy macierzy:*

$$\begin{bmatrix} a & -b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & 3 \\ 2s & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & t+3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & t^2 - 2t & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 3 & -t & -2 \end{bmatrix}$$

w zależności od parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$ *oraz* $s, t \in \mathbb{C}$.

Zadanie 6. *Dla jakich* $x \in \mathbb{R}$ *zachodzi*

$$r \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix} = 3?$$