GAL I (grupa 1),

Baza, wymiar

Zadanie domowe 1. *Dla jakich par* $(s,t) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *wektory* $v_1 = (5,7,s,2)$, $v_2 = (1,3,2,1)$ *oraz* $v_3 = (2,2,4,t)$ *są liniowo niezależne nad* $\mathbb{Q}$*?*

Zadanie domowe 2. *Niech* $f_1, \ldots, f_n$ *będzie układem wielomianów w* $K[x]$ *nie zawierającym wielomianu zerowego, że* $\deg(f_i) \neq \deg(f_j)$*, dla każdego* $i \neq j$*. Wykazać, że układ* $f_1, \ldots, f_n$ *jest liniowo niezależny.*

Zadanie 1. *Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań liniowych w* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\begin{cases} 9x_1 + 12x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = 0. \end{cases} \cdot$$

Zadanie 2. *Niech* $W_1 = \mathrm{lin}((10,3,9+s,1,2-s),(4,1,6,1,1),(2,1,-1,-1,-2)) \subset \mathbb{R}^5$*. oraz niech* W_2 *będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:*

$$\begin{cases} 3x_1 - 11x_2 + tx_3 - 8x_4 + x_5 & = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, x_1 - 5x_2 + x_3 - 6x_4 + x_5 & = 0. \end{cases}$$

Znaleźć $\dim(W_1), \dim(W_2)$ *w zależności od* $s, t \in \mathbb{R}$*. Znaleźć wszystkie takie* s, t*, że* $W_1 = W_2$*.*

Zadanie 3. *Niech* $W \subseteq \mathbb{R}^4$ *będzie opisane przez równania* $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ *oraz* $x_3 - x_4 = 0$*. Dopełnić bazę podprzestrzeni opisanej przez ten układ równań do bazy* $\mathbb{R}^4$*.*

Zadanie 4. *Dopełnij układ wektorów* $(1,2,3,-2,-4), (6,4,-5,-4,-1)$ *do bazy przestrzeni rozwiązań układu równań postaci:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 0 \end{cases}$$

Zadanie 5. *Rozpatrzmy następujące wektory przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*:* $\alpha_1 = (3,2,1)$, $\alpha_2 = (7,3,1)$, $\alpha_3 = (4,2,1)$, $\beta_1 = (0,2,1)$, $\beta_2 = (1,1,2)$, $\beta_3 = (1,0,0)$.

a) Wykazać, że $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *jest bazą przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*. Dla* $i = 1,2,3$ *znaleźć współrzędne* β_i *w tej bazie.*

b) Podać przykład takiej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$*, że wektor* β_1 *ma w niej współrzędne* $1, 2, -1$ *a wektor* β_2 *ma współrzędne* $0, 0, 1$.

c) Czy istnieje taka baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$*, w której wektor* β_1 *ma współrzędne* $1,1,0$*, wektor* β_2 *ma współrzędne* $0,0,1$*, a wektor* β_3 *ma wspórzędne* $1,1,1$*?*

Zadanie 6. *Niech* $V = \mathrm{lin}((1,1,3,2),(4,5,2,5),(2,3,-4,1),(1,2,-5,5))$ *oraz* $\beta = (1,1,3,3)$*. Dla jakich* $r \in \mathbb{R}$ *istnieje baza* v_1, v_2, v_3, v_4 *przestrzeni* $\mathbb{R}^4$ *taka, że* v_1, v_2 *należą do* V *a przy tym* β *ma w tej bazie współrzędne* $(0,1,r,0)$*?*