GAL I (grupa 1),

Liniowa niezależność

Zadanie 1. *Pokaż, że funkcje* $\sin(x), \cos(x)$ *są liniowo niezależnymi wektorami przestrzeni* $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Zadanie 2. *Które ze zbiorów są liniowo niezależne w odpowiedniej przestrzeni?*

1. $\{(1,2,1),(1,2,1)\}$ *w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *nad ciałem* $\mathbb{R}$.

2. $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,-1)\}$ *w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *nad ciałem* $\mathbb{R}$.

3. $\{(1,2,3,4),(1,1,1,1),(0,0,0,1),(0,1,2,2)\}$ *w przestrzeni* $\mathbb{C}^4$ *nad ciałem* $\mathbb{C}$.

Zadanie 3. *Z podanego podzbioru* S *przestrzeni wektorowej* V *wybierz maksymalny (względem inkluzji) podzbiór liniowo niezależny, gdy:*

1. $V = \mathbb{R}^4$ *oraz* $S = \{(3,2,1,1),(5,0,2,3),(4,1,4,5),(4,1,-1,-1)\}$.

2. $V = \mathbb{C}^3$ *oraz* $S = \{(2,1,4),(3,5,-1),(3,-2,13),(7,7,7),(-4,-9,6)\}$.

3. $V = (\mathbb{Z}_3)^3$ *oraz* $S = \{(1,1,1),(1,2,0),(0,1,2),(0,0,2),(2,1,2),(2,2,1)\}$.

Zadanie 4. *Dla jakich par* $(s,t) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *wektory* $v_1 = (5,7,s,2)$, $v_2 = (1,3,2,1)$ *oraz* $v_3 = (2,2,4,t)$ *są liniowo niezależne nad* $\mathbb{Q}$*?*

Zadanie 5. *Załóżmy, że* $u_1, \dots, u_n$ *są liniowo niezależnymi wektorami przestrzeni liniowej* V *nad ciałem* K. *Czy wektory* $v_1, \dots, v_n \in V$ *zdefiniowane formułą*

$$v_i = u_1 + \cdots + u_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

są liniowo niezależne?

Zadanie 6. *Niech* $f_1, \dots, f_n$ *będzie układem wielomianów w* $K[x]$ *nie zawierającym wielomianu zerowego, że* $\deg(f_i) \neq \deg(f_j)$, *dla każdego* $i \neq j$. *Wykazać, że układ* $f_1, \dots, f_n$ *jest liniowo niezależny.*

Zadanie 7. *Niech* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *będzie układem wektorów przestrzeni* $\mathbb{R}^n$, *przy czym dla każdego* $i = 1, 2, \dots, n$ *wektor* $\alpha_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ *spełnia warunek* $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. *Wykazać, że układ* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *jest liniowo niezależny.*

Zadanie 8. *Sprawdź, że wektory* $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ *przestrzeni liniowej* $\mathbb{R}$ *nad* $\mathbb{Q}$ *są liniowo niezależne.*

Zadanie 9. *Pokazać, że istnieje nieskończony podzbiór wektorów przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *taki, że każde* n *wektorów w tym podzbiorze jest liniowo niezależne.*