Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 9, 15.12.2020 r.

Na ostatnim wykładzie:

- definicja przekształcenia liniowego pomiędzy przestrzeniami nad ciałem K,
- przykłady: identyczność, homotetia, rzut, symetria, obrót,
- przekształcenie jest jednoznacznie wyznaczone przez wartości na bazie,
- opis przekształceń liniowych z K^n do K^m,
- pojęcie jądra i wymiaru przekształcenia liniowego,
- jeśli $\phi : V \to W$ jest liniowe to $\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi)$,
- monomorfizm, epimorfizm, izomorfizm.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{im}(\phi) = W$.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Załóżmy, że ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Załóżmy, że ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.
- Skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ mamy $\alpha = 0$. A zatem $\ker(\phi) = \{0\}$.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Załóżmy, że ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.
- Skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ mamy $\alpha = 0$. A zatem $\ker(\phi) = \{0\}$.
- Na odwrót: jeśli $\ker(\phi) = \{0\}$ oraz dla pewnych $\alpha, \beta \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$,

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Załóżmy, że ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.
- Skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ mamy $\alpha = 0$. A zatem $\ker(\phi) = \{0\}$.
- Na odwrót: jeśli $\ker(\phi) = \{0\}$ oraz dla pewnych $\alpha, \beta \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$,
- to z liniowości $\phi(\alpha - \beta) = 0$.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Załóżmy, że ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.
- Skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ mamy $\alpha = 0$. A zatem $\ker(\phi) = \{0\}$.
- Na odwrót: jeśli $\ker(\phi) = \{0\}$ oraz dla pewnych $\alpha, \beta \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$,
- to z liniowości $\phi(\alpha - \beta) = 0$.
- Skoro $\ker(\phi) = \{0\}$, to $\alpha - \beta = 0$, czyli $\alpha = \beta$.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Załóżmy, że ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.
- Skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ mamy $\alpha = 0$. A zatem $\ker(\phi) = \{0\}$.
- Na odwrót: jeśli $\ker(\phi) = \{0\}$ oraz dla pewnych $\alpha, \beta \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$,
- to z liniowości $\phi(\alpha - \beta) = 0$.
- Skoro $\ker(\phi) = \{0\}$, to $\alpha - \beta = 0$, czyli $\alpha = \beta$.
- W szczególności ϕ to monomorfizm.

Wniosek 1.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\mathbf{dim}(V), \mathbf{dim}(W) < \infty$. Wówczas:

- jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leq \dim W$,
- jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$,
- jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.

Wniosek 1.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\mathbf{dim}(V), \mathbf{dim}(W) < \infty$. Wówczas:

- jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leq \dim W$,
- jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$,
- jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.

Dowód pierwszego punktu.

- Jeśli ϕ jest monomofizmem, to $\ker(\phi) = \{0\}$.

Wniosek 1.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\mathbf{dim}(V), \mathbf{dim}(W) < \infty$. Wówczas:

- jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leq \dim W$,
- jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$,
- jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.

Dowód pierwszego punktu.

- Jeśli ϕ jest monomofizmem, to $\ker(\phi) = \{0\}$.
- A zatem $\dim(\ker(\phi)) = 0$.

Wniosek 1.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\mathbf{dim}(V), \mathbf{dim}(W) < \infty$. Wówczas:

- jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leq \dim W$,
- jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$,
- jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.

Dowód pierwszego punktu.

- Jeśli ϕ jest monomofizmem, to $\ker(\phi) = \{0\}$.
- A zatem $\dim(\ker(\phi)) = 0$.
- Skoro $\dim V = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi))$, to $\dim V = \dim(\mathrm{im}(\phi))$.

Wniosek 1.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\mathbf{dim}(V), \mathbf{dim}(W) < \infty$. Wówczas:

- jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leq \dim W$,
- jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$,
- jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.

Dowód pierwszego punktu.

- Jeśli ϕ jest monomofizmem, to $\ker(\phi) = \{0\}$.
- A zatem $\dim(\ker(\phi)) = 0$.
- Skoro $\dim V = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\operatorname{im}(\phi))$, to $\dim V = \dim(\operatorname{im}(\phi))$.
- Skoro $\operatorname{im}(\phi) \subseteq W$, to $\dim(\operatorname{im}(\phi)) \leq \dim W$.

Wniosek 1.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym **$\dim(V), \dim(W) < \infty$**. Wówczas:

- jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leq \dim W$,
- jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$,
- jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.

Dowód pierwszego punktu.

- Jeśli ϕ jest monomofizmem, to $\ker(\phi) = \{0\}$.
- A zatem $\dim(\ker(\phi)) = 0$.
- Skoro $\dim V = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\operatorname{im}(\phi))$, to $\dim V = \dim(\operatorname{im}(\phi))$.
- Skoro $\operatorname{im}(\phi) \subseteq W$, to $\dim(\operatorname{im}(\phi)) \leq \dim W$.
- Zatem $\dim V \leq \dim W$.

Wniosek 1.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\mathbf{dim}(\boldsymbol{V}), \mathbf{dim}(\boldsymbol{W}) < \infty$. Wówczas:

- jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leq \dim W$,
- jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$,
- jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.

Wniosek 2.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym i niech $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{V} = \mathbf{dim}\, \boldsymbol{W} < \infty$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(a) ϕ jest monomorfizmem,

(b) ϕ jest epimorfizmem,

(c) ϕ jest izomorfizmem.

Definicja 1.

Mówimy, że przestrzenie V i W nad ciałem K są **izomorficzne**, jeśli istnieje izomorfizm $\phi : V \to W$. Oznaczenie: $V \simeq W$.

Definicja 1.

Mówimy, że przestrzenie V i W nad ciałem K są **izomorficzne**, jeśli istnieje izomorfizm $\phi : V \to W$. Oznaczenie: $V \simeq W$.

Twierdzenie 1.

Niech V, W będą przestrzeniami skończonego wymiaru nad ciałem K. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $V \simeq W$,

(ii) $\dim V = \dim W$,

(iii) $V \simeq K^{\dim W}$.

Definicja 1.

Mówimy, że przestrzenie V i W nad ciałem K są **izomorficzne**, jeśli istnieje izomorfizm $\phi : V \to W$. Oznaczenie: $V \simeq W$.

Twierdzenie 1.

Niech V, W będą przestrzeniami skończonego wymiaru nad ciałem K. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $V \simeq W$,

(ii) $\dim V = \dim W$,

(iii) $V \simeq K^{\dim W}$.

Ważny przykład na dziś: $M_{m\times n}(K) \simeq K^{m\cdot n}$.

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$.

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$.

- Wiemy już, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ i każdej podprzestrzeni U w W takiej, że $V = \ker(\phi) \oplus U$ przekształcenie ϕ przeprowadza bazę przestrzeni U na bazę przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$.

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$.

- Wiemy już, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ i każdej podprzestrzeni U w W takiej, że $V = \ker(\phi) \oplus U$ przekształcenie ϕ przeprowadza bazę przestrzeni U na bazę przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$.
- Jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\mathrm{im}(\phi) = W$, a także $\ker(\phi) = \{0\}$, więc $V = U$.

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$.

- Wiemy już, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ i każdej podprzestrzeni U w W takiej, że $V = \ker(\phi) \oplus U$ przekształcenie ϕ przeprowadza bazę przestrzeni U na bazę przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$.
- Jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\mathrm{im}(\phi) = W$, a także $\ker(\phi) = \{0\}$, więc $V = U$.
- Zatem ϕ przeprowadza bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$.

- Wiemy już, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ i każdej podprzestrzeni U w W takiej, że $V = \ker(\phi) \oplus U$ przekształcenie ϕ przeprowadza bazę przestrzeni U na bazę przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$.
- Jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\mathrm{im}(\phi) = W$, a także $\ker(\phi) = \{0\}$, więc $V = U$.
- Zatem ϕ przeprowadza bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.
- Pokazaliśmy $(a) \Rightarrow (b)$.

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$.

- Implikacja $(b) \Rightarrow (c)$ jest oczywista.

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$.

- Teraz $(c) \Rightarrow (a)$. Przypuśćmy, że przekształcenie liniowe ϕ przeprowadza bazę $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V na bazę $\beta_1, \ldots, \beta_n$ przestrzeni W.

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$.

- Teraz $(c) \Rightarrow (a)$. Przypuśćmy, że przekształcenie liniowe ϕ przeprowadza bazę $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V na bazę $\beta_1, \ldots, \beta_n$ przestrzeni W.
- Jeśli $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \in \ker(\phi)$, to $0 = \phi(\alpha) = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n$, więc $a_1 = \ldots = a_n = 0$. A zatem $\alpha = 0$. Wobec dowolności α mamy $\ker(\phi) = \{0\}$.

Dowód zaczynamy od następującego faktu:

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne dla przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$:

(a) ϕ jest izomorfizmem,

(b) ϕ przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,

(c) ϕ przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.

Pokażemy tezę dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$.

- Teraz $(c) \Rightarrow (a)$. Przypuśćmy, że przekształcenie liniowe ϕ przeprowadza bazę $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V na bazę $\beta_1, \ldots, \beta_n$ przestrzeni W.
- Jeśli $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \in \ker(\phi)$, to $0 = \phi(\alpha) = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n$, więc $a_1 = \ldots = a_n = 0$. A zatem $\alpha = 0$. Wobec dowolności α mamy $\ker(\phi) = \{0\}$.
- Weźmy $\beta = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n$. Wówczas $\beta = \phi(\alpha)$, dla pewnego $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$. A zatem z dowolności wyboru β mamy $W = \mathrm{im}(\phi)$.

Dowód

Twierdzenie 1.

Niech V, W będą przestrzeniami skończonego wymiaru nad ciałem K. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $V \simeq W$,

(ii) $\dim V = \dim W$,

(iii) $V \simeq K^{\dim W}$.

- Implikacja $(i) \Rightarrow (ii)$ została pokazana już wcześniej.

Dowód

Twierdzenie 1.

Niech V, W będą przestrzeniami skończonego wymiaru nad ciałem K. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $V \simeq W$,

(ii) $\dim V = \dim W$,

(iii) $V \simeq K^{\dim W}$.

- Implikacja $(i) \Rightarrow (ii)$ została pokazana już wcześniej.
- Implikacja $(ii) \Rightarrow (i)$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą V oraz niech $\beta_1, \ldots, \beta_n$ będzie bazą W. Definiujemy $\phi : V \to W$ warunkiem $\phi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leq i \leq n$.

Dowód

Twierdzenie 1.

Niech V, W będą przestrzeniami skończonego wymiaru nad ciałem K. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $V \simeq W$,

(ii) $\dim V = \dim W$,

(iii) $V \simeq K^{\dim W}$.

- Implikacja $(i) \Rightarrow (ii)$ została pokazana już wcześniej.
- Implikacja $(ii) \Rightarrow (i)$. Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będzie bazą V oraz niech $\beta_1, \dots, \beta_n$ będzie bazą W. Definiujemy $\phi : V \to W$ warunkiem $\phi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leq i \leq n$.
- Wiadomo, że takie przekształcenie istnieje dla każdego układu wektorów W równolicznego z bazą $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Takie przekształcenie ϕ, które wybraliśmy, musi być jednak izomorfizmem, bo przeprowadza bazę V na bazę W.

Dowód

Twierdzenie 1.

Niech V, W będą przestrzeniami skończonego wymiaru nad ciałem K. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) $V \simeq W$,

(ii) $\dim V = \dim W$,

(iii) $V \simeq K^{\dim W}$.

- Implikacja $(i) \Rightarrow (ii)$ została pokazana już wcześniej.
- Implikacja $(ii) \Rightarrow (i)$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą V oraz niech $\beta_1, \ldots, \beta_n$ będzie bazą W. Definiujemy $\phi : V \to W$ warunkiem $\phi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leq i \leq n$.
- Wiadomo, że takie przekształcenie istnieje dla każdego układu wektorów W równolicznego z bazą $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Takie przekształcenie ϕ, które wybraliśmy, musi być jednak izomorfizmem, bo przeprowadza bazę V na bazę W.
- Równoważność (iii) z pozostałymi, wynika z równości $\dim(K^{\dim W}) = \dim W$.

Definicja 2.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K i niech $\phi, \psi : V \to W$ będą przekształceniami liniowymi. **Sumą** ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\phi + \psi : V \to W$ zadane wzorem:

$$(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v),$$

dla każdego $v \in V$. **Iloczynem** ϕ przez element $a \in K$ nazywamy odwzorowanie $a\phi : V \to W$ postaci:

$$(a\phi)(v) = a \cdot \phi(v),$$

dla każdego $v \in V$.

Definicja 2.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K i niech $\phi, \psi : V \to W$ będą przekształceniami liniowymi. **Sumą** ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\phi + \psi : V \to W$ zadane wzorem:

$$(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v),$$

dla każdego $v \in V$. **Iloczynem** ϕ przez element $a \in K$ nazywamy odwzorowanie $a\phi : V \to W$ postaci:

$$(a\phi)(v) = a \cdot \phi(v),$$

dla każdego $v \in V$.

Uwaga. Jeśli $\phi, \psi : V \to W$ są przekształceniami liniowymi, to $\phi + \psi$ oraz $a\phi$ są przekształceniami liniowymi. Zbiór wszystkich przekształceń liniowych $V \to W$ tworzy przestrzeń liniową nad K.

Definicja 2.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K i niech $\phi, \psi : V \to W$ będą przekształceniami liniowymi. **Sumą** ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\phi + \psi : V \to W$ zadane wzorem:

$$(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v),$$

dla każdego $v \in V$. **Iloczynem** ϕ przez element $a \in K$ nazywamy odwzorowanie $a\phi : V \to W$ postaci:

$$(a\phi)(v) = a \cdot \phi(v),$$

dla każdego $v \in V$.

Definicja 3.

Przestrzeń wszystkich przekształceń liniowych $V \to W$ oznaczamy $L(V, W)$. Zerem tej przestrzeni liniowej jest przekształcenie zerowe.

Definicja 4.

Niech $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ będą przekształceniami liniowymi przestrzeni nad ciałem K. **Złożeniem przekształceń** ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\psi \circ \phi : V \to Z$ zadane wzorem:

$$(\psi \circ \phi)(v) = \psi(\phi(v)).$$

Definicja 4.

Niech $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ będą przekształceniami liniowymi przestrzeni nad ciałem K. **Złożeniem przekształceń** ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\psi \circ \phi : V \to Z$ zadane wzorem:

$$(\psi \circ \phi)(v) = \psi(\phi(v)).$$

Fakt istnienia złożenia przekształceń $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ postaci $\psi \circ \phi : V \to Z$ opisujemy często na diagramie w następujący sposób:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "\psi\circ\phi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Definicja 4.

Niech $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ będą przekształceniami liniowymi przestrzeni nad ciałem K. **Złożeniem przekształceń** ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\psi \circ \phi : V \to Z$ zadane wzorem:

$$(\psi \circ \phi)(v) = \psi(\phi(v)).$$

- (łączność składania) Jeśli $\phi_1 : V \to W, \phi_2 : W \to Z, \phi_3 : Z \to U$, to
$$(\phi_3 \circ \phi_2) \circ \phi_1 = \phi_3 \circ (\phi_2 \circ \phi_1),$$

Definicja 4.

Niech $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ będą przekształceniami liniowymi przestrzeni nad ciałem K. **Złożeniem przekształceń** ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\psi \circ \phi : V \to Z$ zadane wzorem:

$$(\psi \circ \phi)(v) = \psi(\phi(v)).$$

- (łączność składania) Jeśli $\phi_1 : V \to W, \phi_2 : W \to Z, \phi_3 : Z \to U$, to
$$(\phi_3 \circ \phi_2) \circ \phi_1 = \phi_3 \circ (\phi_2 \circ \phi_1),$$
- (rozdzielność) Jeśli $\phi_1, \phi_2 : V \to W$ oraz $\psi_1, \psi_2 : W \to Z$, to:
$$(\psi_1 + \psi_2) \circ \phi_1 = \psi_1 \circ \phi_1 + \psi_2 \circ \phi_1, \quad \psi_1 \circ (\phi_1 + \phi_2) = \psi_1 \circ \phi_1 + \psi_1 \circ \phi_2.$$

Definicja 4.

Niech $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ będą przekształceniami liniowymi przestrzeni nad ciałem K. **Złożeniem przekształceń** ϕ i ψ nazywamy odwzorowanie $\psi \circ \phi : V \to Z$ zadane wzorem:

$$(\psi \circ \phi)(v) = \psi(\phi(v)).$$

- (łączność składania) Jeśli $\phi_1 : V \to W, \phi_2 : W \to Z, \phi_3 : Z \to U$, to
$$(\phi_3 \circ \phi_2) \circ \phi_1 = \phi_3 \circ (\phi_2 \circ \phi_1),$$
- (rozdzielność) Jeśli $\phi_1, \phi_2 : V \to W$ oraz $\psi_1, \psi_2 : W \to Z$, to:
$$(\psi_1 + \psi_2) \circ \phi_1 = \psi_1 \circ \phi_1 + \psi_2 \circ \phi_1, \quad \psi_1 \circ (\phi_1 + \phi_2) = \psi_1 \circ \phi_1 + \psi_1 \circ \phi_2.$$
- (jedynka) Jeśli $\phi : V \to W$ oraz $\mathrm{id}_V, \mathrm{id}_W$ są odpowiednio identycznościami na V oraz na W, to mamy:
$$\phi \circ \mathrm{id}_V = \phi = \mathrm{id}_W \circ \phi.$$

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2). Niech ϕ będzie izomorfizmem.

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2). Niech ϕ będzie izomorfizmem.
- Określamy $\psi : W \to V$ warunkiem $\psi(\beta) = \alpha$, gdzie $\phi(\alpha) = \beta$.

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2). Niech ϕ będzie izomorfizmem.
- Określamy $\psi : W \to V$ warunkiem $\psi(\beta) = \alpha$, gdzie $\phi(\alpha) = \beta$.
- Jeśli $\psi(\beta_1) = \alpha_1$ oraz $\psi(\beta_2) = \alpha_2$, to $\phi(\alpha_1) = \beta_1$, $\phi(\alpha_2) = \beta_2$.

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2). Niech ϕ będzie izomorfizmem.
- Określamy $\psi : W \to V$ warunkiem $\psi(\beta) = \alpha$, gdzie $\phi(\alpha) = \beta$.
- Jeśli $\psi(\beta_1) = \alpha_1$ oraz $\psi(\beta_2) = \alpha_2$, to $\phi(\alpha_1) = \beta_1$, $\phi(\alpha_2) = \beta_2$.
- Z liniowości ϕ mamy $\phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$.

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2). Niech ϕ będzie izomorfizmem.
- Określamy $\psi : W \to V$ warunkiem $\psi(\beta) = \alpha$, gdzie $\phi(\alpha) = \beta$.
- Jeśli $\psi(\beta_1) = \alpha_1$ oraz $\psi(\beta_2) = \alpha_2$, to $\phi(\alpha_1) = \beta_1$, $\phi(\alpha_2) = \beta_2$.
- Z liniowości ϕ mamy $\phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$.
- A zatem $\psi(\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = \psi(\beta_1) + \psi(\beta_2)$.

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2). Niech ϕ będzie izomorfizmem.
- Określamy $\psi : W \to V$ warunkiem $\psi(\beta) = \alpha$, gdzie $\phi(\alpha) = \beta$.
- Jeśli $\psi(\beta_1) = \alpha_1$ oraz $\psi(\beta_2) = \alpha_2$, to $\phi(\alpha_1) = \beta_1$, $\phi(\alpha_2) = \beta_2$.
- Z liniowości ϕ mamy $\phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$.
- A zatem $\psi(\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = \psi(\beta_1) + \psi(\beta_2)$.
- Analogicznie sprawdzamy $\psi(c\beta) = c\psi(\beta)$, dla każdych $\beta \in W$, $c \in K$.

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2). Niech ϕ będzie izomorfizmem.
- Określamy $\psi : W \to V$ warunkiem $\psi(\beta) = \alpha$, gdzie $\phi(\alpha) = \beta$.
- Jeśli $\psi(\beta_1) = \alpha_1$ oraz $\psi(\beta_2) = \alpha_2$, to $\phi(\alpha_1) = \beta_1$, $\phi(\alpha_2) = \beta_2$.
- Z liniowości ϕ mamy $\phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$.
- A zatem $\psi(\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = \psi(\beta_1) + \psi(\beta_2)$.
- Analogicznie sprawdzamy $\psi(c\beta) = c\psi(\beta)$, dla każdych $\beta \in W$, $c \in K$.
- Zatem ψ jest liniowe i $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ oraz $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$.

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1). Weźmy $\alpha, \beta \in V$ i niech $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$.

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1). Weźmy $\alpha, \beta \in V$ i niech $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$.
- $\alpha = \mathrm{id}_V(\alpha) = (\psi \circ \phi)(\alpha) = \psi(\phi(\alpha)) = \psi(\phi(\beta)) = (\psi \circ \phi)(\alpha) = \mathrm{id}_V(\beta) = \beta$.

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1). Weźmy $\alpha, \beta \in V$ i niech $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$.
- $\alpha = \mathrm{id}_V(\alpha) = (\psi \circ \phi)(\alpha) = \psi(\phi(\alpha)) = \psi(\phi(\beta)) = (\psi \circ \phi)(\alpha) = \mathrm{id}_V(\beta) = \beta$.
- Zatem ϕ jest różnowartościowe. Dlaczego jest „na”?

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1). Weźmy $\alpha, \beta \in V$ i niech $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$.
- $\alpha = \mathrm{id}_V(\alpha) = (\psi \circ \phi)(\alpha) = \psi(\phi(\alpha)) = \psi(\phi(\beta)) = (\psi \circ \phi)(\alpha) = \mathrm{id}_V(\beta) = \beta$.
- Zatem ϕ jest różnowartościowe. Dlaczego jest „na”?
- Mamy $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$, a więc dla każdego $\gamma \in W$ mamy:

$$\gamma = \mathrm{id}_W(\gamma) = (\phi \circ \psi)(\gamma) = \phi(\psi(\gamma)).$$

Fakt

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest izomorfizmem,

(2) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że:

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V \text{ oraz } \phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Dowód:

- Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1). Weźmy $\alpha, \beta \in V$ i niech $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$.
- $\alpha = \mathrm{id}_V(\alpha) = (\psi \circ \phi)(\alpha) = \psi(\phi(\alpha)) = \psi(\phi(\beta)) = (\psi \circ \phi)(\alpha) = \mathrm{id}_V(\beta) = \beta$.
- Zatem ϕ jest różnowartościowe. Dlaczego jest „na”?
- Mamy $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$, a więc dla każdego $\gamma \in W$ mamy:
$$\gamma = \mathrm{id}_W(\gamma) = (\phi \circ \psi)(\gamma) = \phi(\psi(\gamma)).$$
- A więc $\gamma = \phi(\psi(\gamma))$, czyli ϕ jest na.

Definicja 5.

Jeśli $\phi : V \to W$ jest izomorfizmem, to przekształcenie liniowe: $\psi : W \to V$ spełniające $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ oraz $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ nazywamy **przekształceniem odwrotnym** do ϕ (lub **izomorfizmem odwrotnym** do ϕ).

Definicja 5.

Jeśli $\phi : V \to W$ jest izomorfizmem, to przekształcenie liniowe: $\psi : W \to V$ spełniające $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ oraz $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ nazywamy **przekształceniem odwrotnym** do ϕ (lub **izomorfizmem odwrotnym** do ϕ).

Uwaga bez dowodu, ale się przyda.

- Przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że
$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V .$$
- Przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że
$$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W .$$

Cel: opisać przestrzeń $L(K^n, K^m)$.

Cel: opisać przestrzeń $L(K^n, K^m)$.

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3).$$

- Co wiemy o przekształceniu ϕ?
- Jaka jest *geometria* tego przekształcenia?
- Jak inaczej niż wzorem opisać to przekształcenie?

Cel: opisać przestrzeń $L(K^n, K^m)$.

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3).$$

Powyższy wzór można zrozumieć tak:

$$\begin{aligned} \phi((x_1, x_2, x_3)) &= \phi(x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)) = \\ &= \quad x_1(2,1) \quad + x_2(1,-1) \; + x_3(-1,1). \end{aligned}$$

Wzór mówi jak wyglądają obrazy bazy standardowej.

Cel: opisać przestrzeń $L(K^n, K^m)$.

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3).$$

Powyższy wzór można zrozumieć tak:

$$\begin{aligned} \phi((x_1, x_2, x_3)) &= \phi(x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)) = \\ &= \quad x_1(2,1) \quad + x_2(1,-1) \; + x_3(-1,1). \end{aligned}$$

Inaczej pisząc:

$$\begin{aligned} \phi((1,0,0)) &= (2,1) = 2 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1), \\ \phi((0,1,0)) &= (1,-1) = 1 \cdot (1,0) - 1 \cdot (0,1), \\ \phi((0,0,1)) &= (-1,1) = -1 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1) \end{aligned}$$

Cel: opisać przestrzeń $L(K^n, K^m)$.

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3).$$

Powyższy wzór można zrozumieć tak:

$$\begin{aligned} \phi((x_1, x_2, x_3)) &= \phi(x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)) = \\ &= \quad x_1(2,1) \quad + x_2(1,-1) \ + x_3(-1,1). \end{aligned}$$

- Może lepiej wskazać obrazy innej bazy?
- Może lepiej obrazy *odczytywać* w innej bazie?

Cel: opisać przestrzeń $L(K^n, K^m)$.

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3).$$

Niech

- $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 2), \alpha_3 = (2, 1, 0)$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$,
- $\beta_1 = (0, 1), \beta_2 = (2, 0)$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Wówczas:

$$\phi(\alpha_1) = (1, 2) = 2 \cdot \beta_1 + \frac{1}{2} \cdot \beta_2,$$

$$\phi(\alpha_2) = (-1, 1) = 1 \cdot \beta_1 - \frac{1}{2} \cdot \beta_2,$$

$$\phi(\alpha_3) = (5, 1) = 1 \cdot \beta_1 + \frac{5}{2} \cdot \beta_2$$

Definicja 6.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

- $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V,
- $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie bazą przestrzeni W.

Macierzą przekształcenia ϕ w bazach $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazywamy taką macierz $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, że dla każdego $1 \leq j \leq n$:

$$\phi(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \ldots + a_{mj}\beta_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i,$$

Taką macierz A oznaczamy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Innymi słowy, dla każdego $\phi : V \to W$ oraz oraz $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jw., oraz każdego $1 \leq j \leq n$

w j-tej kolumnie macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ stoją współrzędne wektora $\phi(\alpha_j)$ w bazie $\mathcal{B}$.

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3),$$

Niech

- $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie
$$\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 2), \alpha_3 = (2, 1, 0)$$
- $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2)$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$, gdzie
$$\beta_1 = (0, 1), \beta_2 = (2, 0).$$

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3),$$

Niech

- $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie

$$\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 2), \alpha_3 = (2, 1, 0)$$

- $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2)$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$, gdzie

$$\beta_1 = (0, 1), \beta_2 = (2, 0).$$

Wówczas:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

bo

$$\phi(\alpha_1) = 2 \cdot \beta_1 + \frac{1}{2} \cdot \beta_2, \quad \phi(\alpha_2) = 1 \cdot \beta_1 - \frac{1}{2} \cdot \beta_2, \quad \phi(\alpha_3) = 1 \cdot \beta_1 + \frac{5}{2} \cdot \beta_2.$$

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3),$$

Niech

- $st = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ będzie bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie
$$\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1)$$
- $st = (\beta_1, \beta_2)$ będzie bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^2$, gdzie
$$\beta_1 = (1, 0), \beta_2 = (0, 1).$$

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + 1x_2 - 1x_3, 1x_1 - 1x_2 + 1x_3),$$

Niech

- $st = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ będzie bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie
$$\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1)$$
- $st = (\beta_1, \beta_2)$ będzie bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^2$, gdzie
$$\beta_1 = (1, 0), \beta_2 = (0, 1).$$

Wówczas:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

bo

$$\phi(\alpha_1) = 2 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1), \quad \phi(\alpha_2) = 1 \cdot (1, 0) - 1 \cdot (0, 1), \quad \phi(\alpha_3) = -1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1).$$

Przykład. Niech $id : K^n \to K^n$ będzie przekształceniem identycznościowym, zaś $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ niech będzie bazą K^n. Wówczas:

$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład. Niech $id : K^n \to K^n$ będzie przekształceniem identycznościowym, zaś $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ niech będzie bazą K^n. Wówczas:

$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz tę nazywać będziemy **macierzą identycznościową** lub **macierzą jednostkową** (rozmiaru n), ozn. I (lub I_n, gdy chcemy podkreślić jej rozmiar).

Przykład. Niech $id : K^n \to K^n$ będzie przekształceniem identycznościowym, zaś $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ niech będzie bazą K^n. Wówczas:

$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz tę nazywać będziemy **macierzą identycznościową** lub **macierzą jednostkową** (rozmiaru n), ozn. I (lub I_n, gdy chcemy podkreślić jej rozmiar).

Definicja, która nam się za chwilę przyda

Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni V. Macierz $C = M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ nazywamy **macierzą zamiany (transformacji) współrzędnych** z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.

Przykład. Niech $V = W \oplus U$ i niech $\phi : V \to V$ będzie rzutem na W wzdłuż U.

Przykład. Niech $V = W \oplus U$ i niech $\phi : V \to V$ będzie rzutem na W wzdłuż U.

Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie taką bazą przestrzeni V, że

- $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ (dla $k \leq n$) jest bazą przestrzeni W,
- $(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni U

Przykład. Niech $V = W \oplus U$ i niech $\phi : V \to V$ będzie rzutem na W wzdłuż U.

Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie taką bazą przestrzeni V, że

- $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ (dla $k \leq n$) jest bazą przestrzeni W,
- $(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni U

Wówczas macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma w pierwszych k kolumnach pierwsze k wektorów bazy standardowej K^n, zaś dalej kolumny zerowe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

Przykład. Niech $V = W \oplus U$ i niech ϕ będzie **symetrią** względem W wzdłuż U.

Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie taką bazą przestrzeni V, że

- $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ (dla $k \leq n$) jest bazą przestrzeni W,
- $(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni U

Wówczas macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma w pierwszych k kolumnach pierwsze k wektorów, zaś dalej $n-k$ wektorów przeciwnych do wektorów z bazy standardowej K^n:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix},$$

Przykład. Niech $d : K[x]_{\leq n} \to K[x]_{\leq n}$ będzie przekształceniem liniowym polegającym na braniu pochodnej wielomianu stopnia co najwyżej n.

Niech $\mathcal{X} = (1, x, \ldots, x^n)$ będzie bazą przestrzeni $K[x]_{\leq n}$.

Przykład. Niech $d : K[x]_{\leq n} \to K[x]_{\leq n}$ będzie przekształceniem liniowym polegającym na braniu pochodnej wielomianu stopnia co najwyżej n.

Niech $\mathcal{X} = (1, x, \ldots, x^n)$ będzie bazą przestrzeni $K[x]_{\leq n}$.

Wówczas:

$$M(d)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problem. Jeśli dane są dwa przekształcenia $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ oraz macierze $M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $M(\psi)_{st}^{st}$, to co możemy powiedzieć o macierzy złożenia

$$M(\psi \circ \phi)_{st}^{st}?$$

Problem. Jeśli dane są dwa przekształcenia $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ oraz macierze $M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $M(\psi)_{st}^{st}$, to co możemy powiedzieć o macierzy złożenia

$$M(\psi \circ \phi)_{st}^{st}?$$

Jeśli $\dim V = k, \dim W = m, \dim Z = n$, to $M(\phi)_{st}^{st} \in M_{m\times k}(K)$, $M(\psi)_{st}^{st} \in M_{k\times n}(K)$.

Problem. Jeśli dane są dwa przekształcenia $\phi : V \to W$ oraz $\psi : W \to Z$ oraz macierze $M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $M(\psi)_{st}^{st}$, to co możemy powiedzieć o macierzy złożenia

$$M(\psi \circ \phi)_{st}^{st}?$$

Jeśli $\dim V = k, \dim W = m, \dim Z = n$, to $M(\phi)_{st}^{st} \in M_{m\times k}(K)$, $M(\psi)_{st}^{st} \in M_{k\times n}(K)$.

Definicja 7.

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{m\times k}(K)$ oraz $B = [b_{ij}] \in M_{k\times n}(K)$ nazywamy taką macierz $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, że dla każdych i, j mamy:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}.$$

Innymi słowy: wyraz w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy C to suma iloczynów odpowiadających sobie l-tych wyrazów w i-tym wierszu macierzy A oraz w j-tym wierszu macierzy B.

Przykład. Jeśli:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wówczas iloczyn macierzy A oraz B ma postać:

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 3 + 3\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład. Jeśli:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wówczas iloczyn macierzy A oraz B ma postać:

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 3 + 3\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla rozważanych wyżej macierzy A, B nie istnieje iloczyn macierzy postaci BA.

Kilka wyników, które wykażemy:

Kilka wyników, które wykażemy:

Twierdzenie 2.

Jeśli V, W, Z są przestrzeniami liniowymi nad K z bazami odpowiednio $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, oraz $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ są przekształceniami liniowymi, to:

$$M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Kilka wyników, które wykażemy:

Twierdzenie 2.

Jeśli V, W, Z są przestrzeniami liniowymi nad K z bazami odpowiednio $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, oraz $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ są przekształceniami liniowymi, to:

$$M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Kluczowy wniosek

Jeśli $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ są bazami przestrzeni V, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ są bazami przestrzeni W, to:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}_W)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}.$$

Wyznaczanie obrazu danego wektora przy przekształceniu liniowym można zinterpretować w języku mnożenia macierzy.

Uwaga

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

- $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V,
- $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ niech będzie bazą przestrzeni W.

Jeśli $a_1, \dots, a_n$ są współrzędnymi wektora α w bazie $\mathcal{A}$ oraz $b_1, \dots, b_m$ są współrzędnymi wektora $\phi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$, to:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Wyznaczanie obrazu danego wektora przy przekształceniu liniowym można zinterpretować w języku mnożenia macierzy.

Uwaga

Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V i

$$C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}},$$

gdzie $\mathrm{id} = \mathrm{id}_V$ jest identycznością na V, to dla każdego $\alpha \in V$: jeśli $a_1, \ldots, a_n$ są współrzędnymi α w bazie $\mathcal{A}$, zaś $b_1, \ldots, b_n$ są jego współrzędnymi w bazie $\mathcal{B}$, to:

$$C \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$