Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 8, 8.12.2020 r.

Definicja 1.

Niech $(V, +, \cdot, 0_V), (W, +, \cdot, 0_W)$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Funkcję $\phi : V \to W$ nazwiemy **przekształceniem liniowym**, jeśli dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ oraz dla każdego $a \in K$ zachodzi:

(i) $\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$,

(ii) $\phi(a \cdot \alpha) = a \cdot \phi(\alpha)$.

W szczególności: $\phi(0_V) = 0_W$, czyli zero przechodzi w zero.

Definicja 1.

Niech $(V, +, \cdot, 0_V), (W, +, \cdot, 0_W)$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Funkcję $\phi : V \to W$ nazwiemy **przekształceniem liniowym**, jeśli dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ oraz dla każdego $a \in K$ zachodzi:

(i) $\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$,

(ii) $\phi(a \cdot \alpha) = a \cdot \phi(\alpha)$.

W szczególności: $\phi(0_V) = 0_W$, czyli zero przechodzi w zero.

- Przekształcenie $\phi : V \to W$ nazwiemy **zerowym**, jeśli mamy
$$\phi(\alpha) = 0, \text{ dla każdego } \alpha \in V.$$
- Przekształcenie $\phi : V \to V$ nazwiemy **identycznością**, ozn. id_V, jeśli mamy
$$\phi(\alpha) = \alpha, \text{ dla każdego } \alpha \in V.$$

Przykłady:

- Przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ postaci
$$\phi((a,b)) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, a\right).$$

Przykłady:

- Przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ postaci
$$\phi((a,b)) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, a\right).$$
- Przekształcenie $\phi : F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ przyporządkowujące funkcji f funkcję $\phi(f)$ daną wzorem
$$(\phi(f))(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

Przykłady:

- Przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ postaci
$$\phi((a,b)) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, a\right).$$
- Przekształcenie $\phi : F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ przyporządkowujące funkcji f funkcję $\phi(f)$ daną wzorem
$$(\phi(f))(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$
- Odwzorowanie $d : K[x] \to K[x]$ zadane wzorem
$$d(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

Przykłady:

- Przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ postaci
$$\phi((a,b)) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, a\right).$$
- Przekształcenie $\phi : F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ przyporządkowujące funkcji f funkcję $\phi(f)$ daną wzorem
$$(\phi(f))(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$
- Odwzorowanie $d : K[x] \to K[x]$ zadane wzorem
$$d(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}.$$
- Odwzorowanie $f : M_{n\times n}(K) \to K$ przypisujące macierzy $A = [a_{ij}]$ sumę elementów na przekątnej $a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

Jeszcze kilka typów przekształceń:

- Przekształcenie liniowe $f : V \to V$ przestrzeni liniowej w siebie dane wzorem $f(\alpha) = a\alpha$ nazywamy **homotetią** (albo jednokładnością) o skali a.

Jeszcze kilka typów przekształceń:

- Przekształcenie liniowe $f : V \to V$ przestrzeni liniowej w siebie dane wzorem $f(\alpha) = a\alpha$ nazywamy **homotetią** (albo jednokładnością) o skali a.
- Przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem:

  $$\phi((x_1, x_2)) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$$

  nazywamy **obrotem** o kąt θ.

Jeszcze kilka typów przekształceń:

- Przekształcenie liniowe $f : V \to V$ przestrzeni liniowej w siebie dane wzorem $f(\alpha) = a\alpha$ nazywamy **homotetią** (albo jednokładnością) o skali a.
- Przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem:
$$\phi((x_1, x_2)) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$$
nazywamy **obrotem** o kąt θ.
- Jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to dla każdego $\alpha \in V$ istnieją jednoznacznie wyznaczone $\alpha_1 \in V_1$ oraz $\alpha_2 \in V_2$, że $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Definiujemy:
    - **rzut** $\phi : V \to V$ przestrzeni V na V_1 wzdłuż V_2 dany wzorem
    $$\phi(\alpha) = \alpha_1.$$
    - **symetrię** $\psi : V \to V$ przestrzeni V względem V_1 wzdłuż V_2 daną wzorem
    $$\psi(\alpha) = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne:

- $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym,
- dla każdych $a_1, \ldots, a_k \in K$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ zachodzi

$$\phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k) = a_1\phi(\alpha_1) + a_2\phi(\alpha_2) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k).$$

Uwaga 1.

Następujące warunki są równoważne:

- $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym,
- dla każdych $a_1, \ldots, a_k \in K$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ zachodzi

$$\phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k) = a_1\phi(\alpha_1) + a_2\phi(\alpha_2) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k).$$

Uwaga 2.

Każde przekształcenie liniowe $f : K^n \to K^m$ jest postaci:

$$f((x_1, \ldots, x_n)) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ \ldots, \ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n),$$

dla pewnych $a_{ij} \in K$, gdzie $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Twierdzenie 1.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech:

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie **bazą przestrzeni** V,
- $\beta_1, , \ldots, \beta_n$ niech będzie dowolnym układem wektorów przestrzeni W.

Wówczas istnieje **dokładnie jedno** takie przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$, że

$$\phi(\alpha_1) = \beta_1, \quad \phi(\alpha_2) = \beta_2, \quad \ldots, \quad \phi(\alpha_n) = \beta_n.$$

Twierdzenie 1.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech:

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie **bazą przestrzeni** V,
- $\beta_1, , \ldots, \beta_n$ niech będzie dowolnym układem wektorów przestrzeni W.

Wówczas istnieje **dokładnie jedno** takie przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$, że

$$\phi(\alpha_1) = \beta_1, \quad \phi(\alpha_2) = \beta_2, \quad \ldots, \quad \phi(\alpha_n) = \beta_n.$$

Dowód:

- Pokażemy najpierw, że istnieje przekształcenie ϕ spełniające podane warunki.

Twierdzenie 1.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech:

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie **bazą przestrzeni** V,
- $\beta_1, , \ldots, \beta_n$ niech będzie dowolnym układem wektorów przestrzeni W.

Wówczas istnieje **dokładnie jedno** takie przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$, że

$$\phi(\alpha_1) = \beta_1, \quad \phi(\alpha_2) = \beta_2, \quad \ldots, \quad \phi(\alpha_n) = \beta_n.$$

Dowód:

- Pokażemy najpierw, że istnieje przekształcenie ϕ spełniające podane warunki.
- Dla każdego $\gamma \in V$ istnieją **jednoznacznie wyznaczone** $a_1, \ldots, a_n \in K$, że

$$\gamma = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n.$$

Twierdzenie 1.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech:

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie **bazą przestrzeni** V,
- $\beta_1, \ldots, \beta_n$ niech będzie dowolnym układem wektorów przestrzeni W.

Wówczas istnieje **dokładnie jedno** takie przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$, że

$$\phi(\alpha_1) = \beta_1, \quad \phi(\alpha_2) = \beta_2, \quad \ldots, \quad \phi(\alpha_n) = \beta_n.$$

Dowód:

- Pokażemy najpierw, że istnieje przekształcenie ϕ spełniające podane warunki.
- Dla każdego $\gamma \in V$ istnieją **jednoznacznie wyznaczone** $a_1, \ldots, a_n \in K$, że

$$\gamma = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n.$$

- Oznacza to, że poniższe przekształcenie ϕ jest **dobrze określone**:

$$\phi(\gamma) = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n.$$

  i spełnia założenia twierdzenia. Dlaczego?

Dowód cd.

- Po pierwsze: ϕ jest liniowe. Dowolne dwa wektory $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ można rozłożyć w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tzn. istnieją $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_n \in K$, że:

$$\gamma_1 = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n, \quad \gamma_2 = a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_n\alpha_n,$$

Dowód cd.

- Po pierwsze: ϕ jest liniowe. Dowolne dwa wektory $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ można rozłożyć w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tzn. istnieją $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_n \in K$, że:

$$\gamma_1 = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n, \quad \gamma_2 = a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_n\alpha_n,$$

zatem:

$$\begin{aligned}\phi(\gamma_1) + \phi(\gamma_2) &= a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n + a'_1\beta_1 + \ldots + a'_n\beta_n = \\ &= (a_1 + a'_1)\beta_1 + \ldots + (a_n + a'_n)\beta_n = \\ &= \phi(\gamma_1 + \gamma_2).\end{aligned}$$

Dowód cd.

- Po pierwsze: ϕ jest liniowe. Dowolne dwa wektory $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ można rozłożyć w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tzn. istnieją $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_n \in K$, że:

  $$\gamma_1 = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n, \quad \gamma_2 = a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_n\alpha_n,$$

  zatem:

  $$\begin{aligned} \phi(\gamma_1) + \phi(\gamma_2) &= a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n + a'_1\beta_1 + \ldots + a'_n\beta_n = \\ &= (a_1 + a'_1)\beta_1 + \ldots + (a_n + a'_n)\beta_n = \\ &= \phi(\gamma_1 + \gamma_2). \end{aligned}$$

- Po drugie: ϕ spełnia warunki twierdzenia. Każdy z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przedstawia się w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ po prostu jako on, a zatem z definicji ϕ:

  $$\phi(\alpha_1) = \beta_1, \quad \phi(\alpha_2) = \beta_2, \quad \ldots, \quad \phi(\alpha_n) = \beta_n.$$

Dowód cd.

- Po pierwsze: ϕ jest liniowe. Dowolne dwa wektory $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ można rozłożyć w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tzn. istnieją $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_n \in K$, że:

$$\gamma_1 = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n, \quad \gamma_2 = a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_n\alpha_n,$$

  zatem:

$$\begin{aligned} \phi(\gamma_1) + \phi(\gamma_2) &= a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n + a'_1\beta_1 + \ldots + a'_n\beta_n = \\ &= (a_1 + a'_1)\beta_1 + \ldots + (a_n + a'_n)\beta_n = \\ &= \phi(\gamma_1 + \gamma_2). \end{aligned}$$

- Po drugie: ϕ spełnia warunki twierdzenia. Każdy z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przedstawia się w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ po prostu jako on, a zatem z definicji ϕ:

$$\phi(\alpha_1) = \beta_1, \quad \phi(\alpha_2) = \beta_2, \quad \ldots, \quad \phi(\alpha_n) = \beta_n.$$

- A zatem istnieje przekształcenie spełniające warunki twierdzenia. Dlaczego jest jednoznaczne?

Dowód cd.

- Załóżmy, że istnieje przekształcenie liniowe $\psi : V \to W$ takie, że $\psi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leq i \leq n$.

Dowód cd.

- Załóżmy, że istnieje przekształcenie liniowe $\psi : V \to W$ takie, że $\psi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leq i \leq n$.
- Wówczas dla każdego $\alpha \in V$ mamy:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= \psi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\ &= a_1\psi(\alpha_1) + \ldots + a_n\psi(\alpha_n) = \end{aligned}$$

Dowód cd.

- Załóżmy, że istnieje przekształcenie liniowe $\psi : V \to W$ takie, że $\psi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leq i \leq n$.
- Wówczas dla każdego $\alpha \in V$ mamy:

$$\begin{aligned}\psi(\alpha) &= \psi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\ &= a_1\psi(\alpha_1) + \ldots + a_n\psi(\alpha_n) = \\ &= a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n = \\ &= a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_n\phi(\alpha_n) =\end{aligned}$$

Dowód cd.

- Załóżmy, że istnieje przekształcenie liniowe $\psi : V \to W$ takie, że $\psi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leq i \leq n$.
- Wówczas dla każdego $\alpha \in V$ mamy:

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &= \psi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\
&= a_1\psi(\alpha_1) + \ldots + a_n\psi(\alpha_n) = \\
&= a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n = \\
&= a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_n\phi(\alpha_n) = \\
&= \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\
&= \phi(\alpha).
\end{aligned}$$

Dowód cd.

- Załóżmy, że istnieje przekształcenie liniowe $\psi : V \to W$ takie, że $\psi(\alpha_i) = \beta_i$, dla $1 \leq i \leq n$.
- Wówczas dla każdego $\alpha \in V$ mamy:

$$\begin{aligned}\psi(\alpha) &= \psi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\ &= a_1\psi(\alpha_1) + \ldots + a_n\psi(\alpha_n) = \\ &= a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n = \\ &= a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_n\phi(\alpha_n) = \\ &= \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\ &= \phi(\alpha).\end{aligned}$$

- Czyli dla każdego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \psi(\alpha)$. Zdefiniowane przez nas przekształcenie liniowe ϕ spełniające podane warunki jest **jedynym** przekształceniem liniowym z V do W spełniającym te warunki!

Komentarze

- Weźmy $\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0)$, $\beta_1 = (1,0,0), \beta_2 = (0,1,0)$. Układ $((1,0,0),(0,1,0))$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^3$, ale nie rozpina tej przestrzeni.

Komentarze

- Weźmy $\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0)$, $\beta_1 = (1,0,0), \beta_2 = (0,1,0)$. Układ $((1,0,0),(0,1,0))$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^3$, ale nie rozpina tej przestrzeni.

  Istnieje więc więcej niż jedno przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $\phi(\alpha_1) = \beta_1$ oraz $\phi(\alpha_2) = \beta_2$. Przykładowe to: identyczność oraz symetria względem płaszczyzny $\mathrm{lin}((1,0,0),(0,1,0))$ wzdłuż $\mathrm{lin}(0,0,1)$.

Komentarze

- Weźmy $\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0)$, $\beta_1 = (1,0,0), \beta_2 = (0,1,0)$. Układ $((1,0,0),(0,1,0))$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^3$, ale nie rozpina tej przestrzeni.

  Istnieje więc więcej niż jedno przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $\phi(\alpha_1) = \beta_1$ oraz $\phi(\alpha_2) = \beta_2$. Przykładowe to: identyczność oraz symetria względem płaszczyzny $\mathrm{lin}((1,0,0),(0,1,0))$ wzdłuż $\mathrm{lin}(0,0,1)$.

- Weźmy $\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (0,1), \alpha_3 = (1,1)$ oraz $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = (1,0,0)$. Teraz układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rozpina $\mathbb{R}^2$, ale jest liniowo zależny.

Komentarze

- Weźmy $\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0)$, $\beta_1 = (1,0,0), \beta_2 = (0,1,0)$. Układ $((1,0,0),(0,1,0))$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^3$, ale nie rozpina tej przestrzeni.

  Istnieje więc więcej niż jedno przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $\phi(\alpha_1) = \beta_1$ oraz $\phi(\alpha_2) = \beta_2$. Przykładowe to: identyczność oraz symetria względem płaszczyzny $\mathrm{lin}((1,0,0),(0,1,0))$ wzdłuż $\mathrm{lin}(0,0,1)$.

- Weźmy $\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (0,1), \alpha_3 = (1,1)$ oraz $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = (1,0,0)$. Teraz układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rozpina $\mathbb{R}^2$, ale jest liniowo zależny.

  Gdyby istniało takie przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, że $\phi(\alpha_1) = \phi(\alpha_2) = \phi(\alpha_3)$, to z liniowości ϕ mielibyśmy sprzeczność:

  $$(0,0,0) = \phi((0,0)) = \phi(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = \phi(\alpha_1) + \phi(\alpha_2) - \phi(\alpha_3) = (1,0,0).$$

Wniosek

Każde przekształcenie liniowe $f : K^n \to K^m$ jest wyznaczone jednoznacznie przez podanie wartości na bazie standardowej $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ przestrzeni V.

Wniosek

Każde przekształcenie liniowe $f : K^n \to K^m$ jest wyznaczone jednoznacznie przez podanie wartości na bazie standardowej $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ przestrzeni V.

Dowód. Jeśli $f(\epsilon_i) = (a_{1i}, \ldots, a_{mi})$, to:

$$\begin{aligned} f((x_1, \ldots, x_n)) &= f(x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1)) = \\ &= f((x_1\epsilon_1 + \ldots + x_n\epsilon_n)) = \end{aligned}$$

Wniosek

Każde przekształcenie liniowe $f : K^n \to K^m$ jest wyznaczone jednoznacznie przez podanie wartości na bazie standardowej $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ przestrzeni V.

Dowód. Jeśli $f(\epsilon_i) = (a_{1i}, \ldots, a_{mi})$, to:

$$\begin{aligned} f((x_1, \ldots, x_n)) &= f(x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1)) = \\ &= f((x_1\epsilon_1 + \ldots + x_n\epsilon_n)) = \\ &= x_1 f(\epsilon_1) + \ldots + x_n f(\epsilon_n) = \end{aligned}$$

Wniosek

Każde przekształcenie liniowe $f : K^n \to K^m$ jest wyznaczone jednoznacznie przez podanie wartości na bazie standardowej $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ przestrzeni V.

Dowód. Jeśli $f(\epsilon_i) = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$, to:

$$\begin{aligned} f((x_1, \dots, x_n)) &= f(x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1)) = \\ &= f((x_1\epsilon_1 + \dots + x_n\epsilon_n)) = \\ &= x_1 f(\epsilon_1) + \dots + x_n f(\epsilon_n) = \\ &= x_1(a_{11}, \dots, a_{m1}) + \dots + x_n(a_{1n}, \dots, a_{mn}) = \\ &= (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n,\ \dots\ ,\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n). \end{aligned}$$

Definicja 2.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.

- **Jądrem** przekształcenia ϕ nazywamy zbiór

$$\ker(\phi) = \{\alpha \in V \,|\, \phi(\alpha) = 0\} \subseteq V.$$

- **Obrazem** przekształcenia ϕ nazywamy zbiór:

$$\mathrm{im}(\phi) = \{\phi(\alpha) \,|\, \alpha \in V\} \subseteq W.$$

Definicja 2.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.

- **Jądrem** przekształcenia ϕ nazywamy zbiór
$$\ker(\phi) = \{\alpha \in V \,|\, \phi(\alpha) = 0\} \subseteq V.$$
- **Obrazem** przekształcenia ϕ nazywamy zbiór:
$$\mathrm{im}(\phi) = \{\phi(\alpha) \,|\, \alpha \in V\} \subseteq W.$$

Uwagi:

- Jądro i obraz przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ są odpowiednio podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V oraz W.

Definicja 2.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.

- **Jądrem** przekształcenia ϕ nazywamy zbiór

$$\ker(\phi) = \{\alpha \in V \,|\, \phi(\alpha) = 0\} \subseteq V.$$

- **Obrazem** przekształcenia ϕ nazywamy zbiór:

$$\mathrm{im}(\phi) = \{\phi(\alpha) \,|\, \alpha \in V\} \subseteq W.$$

Uwagi:

- Jądro i obraz przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ są odpowiednio podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V oraz W.
- Jeśli $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ to $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}(\phi(\alpha), \ldots, \phi(\alpha_n))$.

Kluczowy przykład:

Niech $\phi : K^n \to K^m$ będzie przekształceniem liniowym postaci:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots\ , a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n).$$

Kluczowy przykład:

Niech $\phi : K^n \to K^m$ będzie przekształceniem liniowym postaci:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n).$$

Wówczas $\mathrm{ker}(f)$ jest zbiorem rozwiązań jednorodnego układu równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}.$$

Kluczowy przykład:

Niech $\phi : K^n \to K^m$ będzie przekształceniem liniowym postaci:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots , a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n).$$

Wówczas $\mathrm{ker}(f)$ jest zbiorem rozwiązań jednorodnego układu równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}.$$

A przestrzeń $\mathrm{im}(f)$? Jest to:

$$\mathrm{lin}(f(\epsilon_1), \ldots, f(\epsilon_n)) = \mathrm{lin}((a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mn})).$$

Inne przykłady:

- Niech $\phi : V \to V$ będzie homotetią, przy czym $\phi(v) = av$, dla każdego $v \in V$ oraz pewnego ustalonego $a \in K$. Wówczas:
$$\ker(\phi) = \begin{cases} \{0\}, & a \neq 0 \\ V, & a = 0 \end{cases}, \quad \operatorname{im}(\phi) = \begin{cases} V & , a \neq 0 \\ \{0\} & , a = 0 \end{cases}.$$

Inne przykłady:

- Niech $\phi : V \to V$ będzie homotetią, przy czym $\phi(v) = av$, dla każdego $v \in V$ oraz pewnego ustalonego $a \in K$. Wówczas:

$$\ker(\phi) = \begin{cases} \{0\}, & a \neq 0 \\ V, & a = 0 \end{cases}, \quad \operatorname{im}(\phi) = \begin{cases} V & , a \neq 0 \\ \{0\} & , a = 0 \end{cases}.$$

- Niech $\phi : V \to V$ będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2. Wówczas:

$$\ker(\phi) = V_2, \quad \operatorname{im}(\phi) = V_1.$$

Inne przykłady:

- Niech $\phi : V \to V$ będzie homotetią, przy czym $\phi(v) = av$, dla każdego $v \in V$ oraz pewnego ustalonego $a \in K$. Wówczas:

$$\ker(\phi) = \begin{cases} \{0\}, & a \neq 0 \\ V, & a = 0 \end{cases}, \quad \operatorname{im}(\phi) = \begin{cases} V & , a \neq 0 \\ \{0\} & , a = 0 \end{cases}.$$

- Niech $\phi : V \to V$ będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2. Wówczas:

$$\ker(\phi) = V_2, \quad \operatorname{im}(\phi) = V_1.$$

- Niech $\phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ jest pochodną, to:

$$\ker(\phi) = \{w \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(w) = 0\}, \quad \operatorname{im}(\phi) = \mathbb{R}[x].$$

Inne przykłady:

- Niech $\phi : V \to V$ będzie homotetią, przy czym $\phi(v) = av$, dla każdego $v \in V$ oraz pewnego ustalonego $a \in K$. Wówczas:

$$\ker(\phi) = \begin{cases} \{0\}, & a \neq 0 \\ V, & a = 0 \end{cases}, \quad \operatorname{im}(\phi) = \begin{cases} V & , a \neq 0 \\ \{0\} & , a = 0 \end{cases}.$$

- Niech $\phi : V \to V$ będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2. Wówczas:

$$\ker(\phi) = V_2, \quad \operatorname{im}(\phi) = V_1.$$

- Niech $\phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ jest pochodną, to:

$$\ker(\phi) = \{w \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(w) = 0\}, \quad \operatorname{im}(\phi) = \mathbb{R}[x].$$

- Niech $\phi : K^\infty \to K^\infty$ będzie dane wzorem:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots) \to (0, 0, x_3, x_4, \ldots).$$

  Wówczas $\ker(\phi) = \{(s, t, 0, 0, \ldots), \mid s, t \in K\}$.

Definicja 3.

Wymiar przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$ nazywamy **rzędem przekształcenia**, ozn. $r(\phi)$.

Definicja 3.

Wymiar przestrzeni $\operatorname{im}(\phi)$ nazywamy **rzędem przekształcenia**, ozn. $r(\phi)$.

Uwaga 3.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech U będzie taką podprzestrzenią przestrzeni V, że $V = \ker(\phi) \oplus U$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni U. Wówczas układ $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ jest bazą przestrzeni $\operatorname{im}(\phi)$.

Definicja 3.

Wymiar przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$ nazywamy **rzędem przekształcenia**, ozn. $r(\phi)$.

Uwaga 3.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech U będzie taką podprzestrzenią przestrzeni V, że $V = \ker(\phi) \oplus U$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni U. Wówczas układ $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$.

Twierdzenie 2.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

$$\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim \mathrm{im}(\phi).$$

Dowód uwagi:

- Niech U będzie dopełnieniem prostym $\ker(\phi)$. Weźmy bazę U postaci $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Pokażemy, że: $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ są liniowo niezależne oraz:

$$\operatorname{im}(\phi) = \operatorname{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)).$$

Dowód uwagi:

- Niech U będzie dopełnieniem prostym $\ker(\phi)$. Weźmy bazę U postaci $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Pokażemy, że: $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ są liniowo niezależne oraz:
$$\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)).$$
- Niech $\beta \in \mathrm{im}(\phi)$. Chcemy pokazać, że $\beta \in \mathrm{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k))$.

Dowód uwagi:

- Niech U będzie dopełnieniem prostym $\ker(\phi)$. Weźmy bazę U postaci $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Pokażemy, że: $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ są liniowo niezależne oraz:
$$\operatorname{im}(\phi) = \operatorname{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)).$$
- Niech $\beta \in \operatorname{im}(\phi)$. Chcemy pokazać, że $\beta \in \operatorname{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k))$.
- Wiadomo, że $\beta = \phi(\alpha) = \phi(\alpha' + \alpha'')$, gdzie $\alpha' \in \ker(\phi)$ oraz $\alpha'' \in U$.

Dowód uwagi:

- Niech U będzie dopełnieniem prostym $\ker(\phi)$. Weźmy bazę U postaci $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Pokażemy, że: $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ są liniowo niezależne oraz:
$$\operatorname{im}(\phi) = \operatorname{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)).$$
- Niech $\beta \in \operatorname{im}(\phi)$. Chcemy pokazać, że $\beta \in \operatorname{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k))$.
- Wiadomo, że $\beta = \phi(\alpha) = \phi(\alpha' + \alpha'')$, gdzie $\alpha' \in \ker(\phi)$ oraz $\alpha'' \in U$.
- A zatem $\alpha'' = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$.

Dowód uwagi:

- Niech U będzie dopełnieniem prostym $\ker(\phi)$. Weźmy bazę U postaci $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Pokażemy, że: $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ są liniowo niezależne oraz:
$$\operatorname{im}(\phi) = \operatorname{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)).$$
- Niech $\beta \in \operatorname{im}(\phi)$. Chcemy pokazać, że $\beta \in \operatorname{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k))$.
- Wiadomo, że $\beta = \phi(\alpha) = \phi(\alpha' + \alpha'')$, gdzie $\alpha' \in \ker(\phi)$ oraz $\alpha'' \in U$.
- A zatem $\alpha'' = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$.
- Zatem:
$$\begin{aligned}\beta = \phi(\alpha) = \phi(\alpha' + \alpha'') &= \\ = \phi(\alpha') + \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) &= \\ = 0 + a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) &\in \operatorname{lin}(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)).\end{aligned}$$

Dowód uwagi cd.

- Dowodzimy liniowej niezależności układu $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$.

Dowód uwagi cd.

- Dowodzimy liniowej niezależności układu $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$.
- Przypuśćmy, że $a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) = 0$.

Dowód uwagi cd.

- Dowodzimy liniowej niezależności układu $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$.
- Przypuśćmy, że $a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) = 0$.
- Wówczas $\phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = 0$, a zatem

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi).$$

Dowód uwagi cd.

- Dowodzimy liniowej niezależności układu $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$.
- Przypuśćmy, że $a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) = 0$.
- Wówczas $\phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = 0$, a zatem
$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi).$$
- Ale przecież $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U.

Dowód uwagi cd.

- Dowodzimy liniowej niezależności układu $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$.
- Przypuśćmy, że $a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) = 0$.
- Wówczas $\phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = 0$, a zatem
$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi).$$
- Ale przecież $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U.
- A zatem $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi) \cap U = \{0\}$, bo $V = \ker(\phi) \oplus U$.

Dowód uwagi cd.

- Dowodzimy liniowej niezależności układu $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$.
- Przypuśćmy, że $a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) = 0$.
- Wówczas $\phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = 0$, a zatem
$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi).$$
- Ale przecież $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U.
- A zatem $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi) \cap U = \{0\}$, bo $V = \ker(\phi) \oplus U$.
- W szczególności $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, czyli $a_1 = \ldots = a_k = 0$, bo $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U.

Dowód uwagi cd.

- Dowodzimy liniowej niezależności układu $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$.
- Przypuśćmy, że $a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_k\phi(\alpha_k) = 0$.
- Wówczas $\phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) = 0$, a zatem
$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi).$$
- Ale przecież $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U.
- A zatem $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \in \ker(\phi) \cap U = \{0\}$, bo $V = \ker(\phi) \oplus U$.
- W szczególności $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, czyli $a_1 = \ldots = a_k = 0$, bo $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą U.
- Układ $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_k)$ jest zatem liniowo niezależny.

Dowód twierdzenia (przypadek, gdy $\dim(V) < \infty$). Na mocy twierdzenia o wymiarze sumy prostej mamy:

$$\dim(V) = \dim\ker(\phi) + \dim(U) = \dim\ker(\phi) + k = \dim\ker(\phi) + \dim\operatorname{im}(\phi).$$

Dowód twierdzenia (przypadek, gdy $\dim(V) < \infty$). Na mocy twierdzenia o wymiarze sumy prostej mamy:

$$\dim(V) = \dim\ker(\phi) + \dim(U) = \dim\ker(\phi) + k = \dim\ker(\phi) + \dim\operatorname{im}(\phi).$$

Rezultat nasz ma sens również w przypadku, gdy V jest przestrzenią nieskończonego wymiaru.

Dowód twierdzenia (przypadek, gdy $\dim(V) < \infty$). Na mocy twierdzenia o wymiarze sumy prostej mamy:

$$\dim(V) = \dim\ker(\phi) + \dim(U) = \dim\ker(\phi) + k = \dim\ker(\phi) + \dim\operatorname{im}(\phi).$$

Rezultat nasz ma sens również w przypadku, gdy V jest przestrzenią nieskończonego wymiaru.

Dowód wymaga pewnej modyfikacji, ale w rezultacie okazuje sie, że jesli $\phi : V \to W$ jest liniowe i $\dim(V) = \infty$, to wymiary przestrzeni $\ker(\phi)$ oraz $\operatorname{im}(\phi)$ nie mogą być jednocześnie skończenie wymiarowe.

Dowód twierdzenia (przypadek, gdy $\dim(V) < \infty$). Na mocy twierdzenia o wymiarze sumy prostej mamy:

$$\dim(V) = \dim\ker(\phi) + \dim(U) = \dim\ker(\phi) + k = \dim\ker(\phi) + \dim\mathrm{im}(\phi).$$

Rezultat nasz ma sens również w przypadku, gdy V jest przestrzenią nieskończonego wymiaru.

Dowód wymaga pewnej modyfikacji, ale w rezultacie okazuje sie, że jesli $\phi : V \to W$ jest liniowe i $\dim(V) = \infty$, to wymiary przestrzeni $\ker(\phi)$ oraz $\mathrm{im}(\phi)$ nie mogą być jednocześnie skończenie wymiarowe.

Ważne sytuacje:

- gdy $\dim\ker(\phi) = 0$,
- gdy $\dim\mathrm{im}(\phi) = \dim(V)$,
- gdy zachodzi jedno i drugie.

Definicja 4.

Przekształcenie liniowe ϕ : $V \to W$ nazywamy:

- **monomorfizmem**, gdy ϕ jest różnowartościowe, to znaczy:

$$\phi(\alpha) = \phi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta,$$

  dla każdych $\alpha, \beta \in V$.

Definicja 4.

Przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ nazywamy:

- **monomorfizmem**, gdy ϕ jest różnowartościowe, to znaczy:

  $$\phi(\alpha) = \phi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta,$$

  dla każdych $\alpha, \beta \in V$.

- **epimorfizmem**, gdy ϕ jest „na”, to znaczy gdy dla każdego $\gamma \in W$ istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\phi(\alpha) = \gamma$.

Definicja 4.

Przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ nazywamy:

- **monomorfizmem**, gdy ϕ jest różnowartościowe, to znaczy:

  $$\phi(\alpha) = \phi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta,$$

  dla każdych $\alpha, \beta \in V$.
- **epimorfizmem**, gdy ϕ jest „na”, to znaczy gdy dla każdego $\gamma \in W$ istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\phi(\alpha) = \gamma$.
- **izomorfizmem**, gdy ϕ jest różnowartościowe i „na" (to znaczy, gdy ϕ jest bijekcją).

Definicja 4.

Przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ nazywamy:

- **monomorfizmem**, gdy ϕ jest różnowartościowe, to znaczy:
$$\phi(\alpha) = \phi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta,$$
dla każdych $\alpha, \beta \in V$.
- **epimorfizmem**, gdy ϕ jest „na”, to znaczy gdy dla każdego $\gamma \in W$ istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\phi(\alpha) = \gamma$.
- **izomorfizmem**, gdy ϕ jest różnowartościowe i „na"
(to znaczy, gdy ϕ jest bijekcją).

Izomorfizm przestrzeni to pojęcie pozwalające na ich „utożsamianie".

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{im}(\phi) = W$.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Jeśli ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{ker}(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Jeśli ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.
- Skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ wynika, że $\alpha = 0$. A zatem $\mathrm{ker}(\phi) = 0$.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Jeśli ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.
- Skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ wynika, że $\alpha = 0$. A zatem $\ker(\phi) = 0$.
- Na odwrót: jeśli $\ker(\phi) = \{0\}$ oraz dla pewnych $\alpha, \beta \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$,

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Jeśli ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.
- Skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ wynika, że $\alpha = 0$. A zatem $\ker(\phi) = 0$.
- Na odwrót: jeśli $\ker(\phi) = \{0\}$ oraz dla pewnych $\alpha, \beta \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$,
- to z liniowości $\phi(\alpha - \beta) = 0$.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Jeśli ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.
- Skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ wynika, że $\alpha = 0$. A zatem $\ker(\phi) = 0$.
- Na odwrót: jeśli $\ker(\phi) = \{0\}$ oraz dla pewnych $\alpha, \beta \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$,
- to z liniowości $\phi(\alpha - \beta) = 0$.
- Skoro $\ker(\phi) = \{0\}$, to $\alpha - \beta = 0$, czyli $\alpha = \beta$.

Uwaga 4.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

- ϕ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi) = \{0\}$,
- ϕ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{im}(\phi) = W$.

Dowód:

- Udowodnimy tylko pierwszą równoważność.
- Jeśli ϕ jest monomorfizmem oraz dla pewnego $\alpha \in V$ mamy $\phi(\alpha) = 0$.
- Skoro $\phi(0) = 0$, z różnowartościowości ϕ wynika, że $\alpha = 0$. A zatem $\ker(\phi) = 0$.
- Na odwrót: jeśli $\ker(\phi) = \{0\}$ oraz dla pewnych $\alpha, \beta \in V$ mamy $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$,
- to z liniowości $\phi(\alpha - \beta) = 0$.
- Skoro $\ker(\phi) = \{0\}$, to $\alpha - \beta = 0$, czyli $\alpha = \beta$.
- W szczególności ϕ to monomorfizm.

Wniosek 1.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\mathbf{dim}(V), \mathbf{dim}(W) < \infty$. Wówczas:

- jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leq \dim W$,
- jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$,
- jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.

Wniosek 1.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\mathbf{dim}(V), \mathbf{dim}(W) < \infty$. Wówczas:

- jeśli ϕ jest monomorfizmem, to $\dim V \leq \dim W$,
- jeśli ϕ jest epimorfizmem, to $\dim W \leq \dim V$,
- jeśli ϕ jest izomorfizmem, to $\dim W = \dim V$.

Wniosek 2.

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym i niech $\mathbf{dim}\, V = \mathbf{dim}\, W < \infty$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(a) ϕ jest monomorfizmem,

(b) ϕ jest epimorfizmem,

(c) ϕ jest izomorfizmem.

Za tydzień: co wiemy o przestrzeniach izomorficznych? W szczególności:

- o tym, że skończony wymiar charakteryzuje przestrzenie izomorficzne,
- o przestrzeni przekształceń (i co to jest?) pomiędzy przestrzeniami skończenie wymiarowymi,
- o składaniu (i rozkładaniu) przekształceń i po co to robić?