Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 7, 1.12.2020 r.

Przypomnienie

Rzędem macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy liczbę:

$$\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A. Rząd macierzy oznaczamy przez $\boldsymbol{r(A)}$.

Przypomnienie

Rzędem macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy liczbę:

$$\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \dots, \beta_n),$$

gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A, zaś $\beta_1, \dots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A. Rząd macierzy oznaczamy przez $\boldsymbol{r(A)}$.

Uwaga 1. Rząd macierzy A równy jest liczbie niezerowych wierszy po doprowadzeniu A do postaci schodkowej.

Przypomnienie

Rzędem macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy liczbę:

$$\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A. Rząd macierzy oznaczamy przez $\boldsymbol{r(A)}$.

Uwaga 1. Rząd macierzy A równy jest liczbie niezerowych wierszy po doprowadzeniu A do postaci schodkowej.

Uwaga 2. Licząc rząd można wykonywać operacje elementarne na... kolumnach!

Przykład. Dla $n > 1$ policzyć rząd macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ postaci:

$$\begin{bmatrix} -n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n+1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -n+1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -n+1 \end{bmatrix}.$$

Przykład. Dla $n > 1$ policzyć rząd macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ postaci:

$$\begin{bmatrix} -n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n+1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -n+1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -n+1 \end{bmatrix}.$$

1. Do ostatniego wiersza dodajemy wszystkie pozostałe wiersze:

Przykład. Dla $n > 1$ policzyć rząd macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ postaci:

$$\begin{bmatrix} -n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n+1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -n+1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -n+1 \end{bmatrix}.$$

1. Do ostatniego wiersza dodajemy wszystkie pozostałe wiersze:

$$\begin{bmatrix} -n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n+1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -n+1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przykład. Dla $n > 1$ policzyć rząd macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ postaci:

$$\begin{bmatrix} -n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n+1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -n+1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -n+1 \end{bmatrix}.$$

1. Do ostatniego wiersza dodajemy wszystkie pozostałe wiersze:

2. Odejmujemy ostatnią kolumnę od każdej z pozostałych kolumn:

$$\begin{bmatrix} -n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n+1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -n+1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przykład. Dla $n > 1$ policzyć rząd macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ postaci:

$$\begin{bmatrix} -n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -n+1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -n+1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -n+1 \end{bmatrix}.$$

1. Do ostatniego wiersza dodajemy wszystkie pozostałe wiersze:

2. Odejmujemy ostatnią kolumnę od każdej z pozostałych kolumn:

$$\begin{bmatrix} -n & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -n & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -n & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = n - 1.$$

Twierdzenie Kroneckera-Capelli

Niech U będzie układem równań liniowych o współczynnikach w ciele K postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

o macierzy współczynników A oraz rozszerzonej macierzy współczynników A_u. Wówczas:

(a) Układ U ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u)$,

Twierdzenie Kroneckera-Capelli

Niech U będzie układem równań liniowych o współczynnikach w ciele K postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

o macierzy współczynników A oraz rozszerzonej macierzy współczynników A_u. Wówczas:

(a) Układ U ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u)$,

(b) Przestrzeń rozwiązań układu jednorodnego odpowiadającego układowi U (gdy $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$) ma wymiar $n - r(A)$

Twierdzenie Kroneckera-Capelli

Niech U będzie układem równań liniowych o współczynnikach w ciele K postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

o macierzy współczynników A oraz rozszerzonej macierzy współczynników A_u. Wówczas:

(a) Układ U ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u)$,

(b) Przestrzeń rozwiązań układu jednorodnego odpowiadającego układowi U (gdy $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$) ma wymiar $n - r(A)$

(c) Jeśli α jest rozwiązaniem układu U, a W jest przestrzenią rozwiązań układu jednorodnego odpowiadającego układowi U, to zbiór rozwiązań układu U jest postaci

$$\alpha + W = \{\alpha + \beta, \mid \beta \in W\}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^m$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m.
\end{cases}
$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^m$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:
- $s_1, \ldots, s_n$ jest rozwiązaniem układu U,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^m$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:
- $s_1, \ldots, s_n$ jest rozwiązaniem układu U,
- $s_1\beta_1 + \ldots + s_n\beta_n = \beta$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^m$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:
- $s_1, \ldots, s_n$ jest rozwiązaniem układu U,
- $s_1\beta_1 + \ldots + s_n\beta_n = \beta$,
- $\beta \in \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^m$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:
- $s_1, \ldots, s_n$ jest rozwiązaniem układu U,
- $s_1\beta_1 + \ldots + s_n\beta_n = \beta$,
- $\beta \in \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$,
- $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta)$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^m$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:
- $s_1, \ldots, s_n$ jest rozwiązaniem układu U,
- $s_1\beta_1 + \ldots + s_n\beta_n = \beta$,
- $\beta \in \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$,
- $\text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta)$,
- $\dim \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \dim \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta)$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^m$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:
- $s_1, \ldots, s_n$ jest rozwiązaniem układu U,
- $s_1\beta_1 + \ldots + s_n\beta_n = \beta$,
- $\beta \in \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$,
- $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta)$,
- $\dim \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \dim \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta)$,
- $r(A) = r(A_u)$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \; a_{12}x_2 + \ldots + \; a_{1n}x_n & = 0 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0. \end{cases}$$

Dowód (b).

- Jeśli $r(A) = r$, to macierz A' uzyskana z A przez sprowadzenie do postaci schodkowej ma dokładnie r niezerowych wierszy.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = 0 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0. \end{cases}$$

Dowód (b).

- Jeśli $r(A) = r$, to macierz A' uzyskana z A przez sprowadzenie do postaci schodkowej ma dokładnie r niezerowych wierszy.
- Zatem postać ogólna rozwiązania tego układu ma $n - r$ parametrów.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = 0 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0. \end{cases}$$

Dowód (b).

- Jeśli $r(A) = r$, to macierz A' uzyskana z A przez sprowadzenie do postaci schodkowej ma dokładnie r niezerowych wierszy.
- Zatem postać ogólna rozwiązania tego układu ma $n - r$ parametrów.
- Zatem przestrzeń rozwiązań układu równań ma wymiar $n - r$ (BYŁO)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = 0 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0. \end{cases}$$

Dowód (b).

- Jeśli $r(A) = r$, to macierz A' uzyskana z A przez sprowadzenie do postaci schodkowej ma dokładnie r niezerowych wierszy.
- Zatem postać ogólna rozwiązania tego układu ma $n - r$ parametrów.
- Zatem przestrzeń rozwiązań układu równań ma wymiar $n - r$ (BYŁO)

Przykład. Rozwiązanie ogólne układu U postaci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

ma dwa parametry x_3, x_4. Baza przestrzeni rozwiązań to (-1,0,1,0), (-1,0,0,1).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (c).

- Jeśli $\alpha = (s_1 \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem układu U, czyli

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + \ a_{12}s_2 + \ldots + \ a_{1n}s_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n & = b_m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (c).

- Jeśli $\alpha = (s_1 \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem układu U, czyli

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + \ a_{12}s_2 + \ldots + \ a_{1n}s_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n & = b_m. \end{cases}$$

- Wówczas $\gamma = (r_1, \ldots, r_n) \in K^n$ jest rozwiązaniem układu U wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma - \alpha$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego odpowiadającego U.

$$\begin{cases} a_{11}r_1 + \ldots + \ a_{1n}r_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}r_1 + \ldots + a_{mn}r_n & = b_m. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}(s_1 - r_1) + \ldots + \ a_{1n}(s_n - r_n) & = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}(s_1 - r_1) + \ldots + a_{mn}(s_n - r_n) & = 0. \end{cases}$$

Wniosek

Każda podprzestrzeń V przestrzeni K^n jest przestrzenią rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań liniowych U. Jeśli $\dim V = k$, to można tak dobrać ten układ U, by składał się z $n - k$ równań. Dla $\dim V = k$ oraz $i < n - k$ nie istnieje złożony z i równań układ równań liniowych o przestrzeni rozwiązań V.

Wniosek

Każda podprzestrzeń V przestrzeni K^n jest przestrzenią rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań liniowych U. Jeśli $\dim V = k$, to można tak dobrać ten układ U, by składał się z $n - k$ równań. Dla $\dim V = k$ oraz $i < n - k$ nie istnieje złożony z i równań układ równań liniowych o przestrzeni rozwiązań V.

Dowód: Jeśli $(s_1, \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem równania

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0,$$

to $(a_1, \ldots, a_n)$ jest rozwiązaniem równania

$$s_1x_1 + \ldots + s_nx_n = 0.$$

A ogólniej...

Wniosek

Każda podprzestrzeń V przestrzeni K^n jest przestrzenią rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań liniowych U. Jeśli $\dim V = k$, to można tak dobrać ten układ U, by składał się z $n - k$ równań. Dla $\dim V = k$ oraz $i < n - k$ nie istnieje złożony z i równań układ równań liniowych o przestrzeni rozwiązań V.

Dowód: Jeśli $(s_{11}, \ldots, s_{1n}), \ldots, (s_{m1}, \ldots, s_{mn})$ są rozwiązaniami układu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ \qquad\ldots & \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n & = 0 \end{cases},$$

to $(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ są rozwiązaniami układu:

$$\begin{cases} s_{11}x_1 + \ldots + s_{1n}x_n & = 0 \\ \qquad\ldots & \\ s_{m1}x_1 + \ldots + s_{mn}x_n & = 0 \end{cases}.$$

Dowód: Jeśli $(s_{11}, \ldots, s_{1n}), \ldots, (s_{m1}, \ldots, s_{mn})$ jest bazą przestrzeni V rozwiązań układu o macierzy schodkowej

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix},$$

to na mocy Twierdzenia Kroneckera-Capellego $m = n - k$, co więcej wektory

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$$

są liniowo niezależne i są rozwiązaniami układu o macierzy rzędu m postaci

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \ldots & s_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dowód: Jeśli $(s_{11}, \dots, s_{1n}), \dots, (s_{m1}, \dots, s_{mn})$ jest bazą przestrzeni V rozwiązań układu o macierzy schodkowej

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix},$$

to na mocy Twierdzenia Kroneckera-Capellego $m = n - k$, co więcej wektory

$$(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{k1}, \dots, a_{kn})$$

są liniowo niezależne i są rozwiązaniami układu o macierzy rzędu m postaci

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ale ten układ ma przestrzeń rozwiązań wymiaru $n - m = n - (m - k) = k$.
Czyli jest to dokładnie $\mathrm{lin}((a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{k1}, \dots, a_{kn}))$ – przestrzeń wymiaru k.

Wnioski:

- Każdą podprzestrzeń w K^n możemy opisać albo jako przestrzeń rozpiętą na pewnym układzie wektorów (tw. Steinitza), albo jako przestrzeń rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań (tw. K-C).

Wnioski:

- Każdą podprzestrzeń w K^n możemy opisać albo jako przestrzeń rozpiętą na pewnym układzie wektorów (tw. Steinitza), albo jako przestrzeń rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań (tw. K-C).
- Zauważmy, że jeśli V_1 oraz V_2 są podprzestrzeniami w K^n opisanymi układami równań U_1 oraz U_2, to podprzestrzeń
$$V_1 \cap V_2$$
jest opisana układem równań złożonym ze wszystkich równań z U_1 oraz wszystkich równań z U_2.

Wnioski:

- Każdą podprzestrzeń w K^n możemy opisać albo jako przestrzeń rozpiętą na pewnym układzie wektorów (tw. Steinitza), albo jako przestrzeń rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań (tw. K-C).
- Zauważmy, że jeśli V_1 oraz V_2 są podprzestrzeniami w K^n opisanymi układami równań U_1 oraz U_2, to podprzestrzeń
$$V_1 \cap V_2$$
jest opisana układem równań złożonym ze wszystkich równań z U_1 oraz wszystkich równań z U_2.
- Zauważmy, że jeśli $V_1 = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oraz $V_2 = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ są podprzestrzeniami przestrzeni V, to podprzestrzeń:
$$W = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$$
złożona jest ze wszystkich wektorów postaci $\alpha + \beta$, gdzie $\alpha \in V_1, \beta \in V_2$.

Definicja

Niech X, Y będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Przez $X + Y$ oznaczać będziemy zbiór

$$\{x + y \,|\, x \in X, y \in Y\}.$$

Jest to podprzestrzeń V zwana **sumą podprzestrzeni** X i Y. Analogicznie definiujemy sumę n podprzestrzeni $V_1, \ldots, V_n$ przestrzeni V:

$$V_1 + \ldots + V_n = \{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \,|\, \alpha_i \in V_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Definicja

Niech X, Y będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Przez $X + Y$ oznaczać będziemy zbiór

$$\{x + y \,|\, x \in X, y \in Y\}.$$

Jest to podprzestrzeń V zwana **sumą podprzestrzeni** X i Y. Analogicznie definiujemy sumę n podprzestrzeni $V_1, \ldots, V_n$ przestrzeni V:

$$V_1 + \ldots + V_n = \{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \,|\, \alpha_i \in V_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Uwagi:

- $\mathbb{R}^2 = \mathrm{lin}(1,0) + \mathrm{lin}(1,1)$, bo dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mamy:

$$(x,y) = (x-y,0) + (y,y).$$

Definicja

Niech X, Y będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Przez $X+Y$ oznaczać będziemy zbiór

$$\{x+y \,|\, x \in X, y \in Y\}.$$

Jest to podprzestrzeń V zwana **sumą podprzestrzeni** X i Y. Analogicznie definiujemy sumę n podprzestrzeni $V_1, \ldots, V_n$ przestrzeni V:

$$V_1 + \ldots + V_n = \{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \,|\, \alpha_i \in V_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Uwagi:

- $\mathbb{R}^2 = \mathrm{lin}(1,0) + \mathrm{lin}(1,1)$, bo dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mamy:

$$(x,y) = (x-y, 0) + (y,y).$$

- Dla każdej przestrzeni V mamy $V = V + V$ oraz $V = V + \{0\}$.

Definicja

Niech X, Y będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Przez $X + Y$ oznaczać będziemy zbiór

$$\{x + y \,|\, x \in X, y \in Y\}.$$

Jest to podprzestrzeń V zwana **sumą podprzestrzeni** X i Y. Analogicznie definiujemy sumę n podprzestrzeni $V_1, \ldots, V_n$ przestrzeni V:

$$V_1 + \ldots + V_n = \{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \,|\, \alpha_i \in V_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Uwagi:

- $\mathbb{R}^2 = \mathrm{lin}(1, 0) + \mathrm{lin}(1, 1)$, bo dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mamy:

$$(x, y) = (x - y, 0) + (y, y).$$

- Dla każdej przestrzeni V mamy $V = V + V$ oraz $V = V + \{0\}$.
- Zwykle $V_1 \cup V_2 \neq V_1 + V_2$, ale zawsze $\mathrm{lin}(X \cup Y) = \mathrm{lin}(X) + \mathrm{lin}(Y)$.

Uwaga

Niech $\{X_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni liniowej V. Wówczas

$$\bigcap_{t\in T} X_t$$

jest podprzestrzenią V. Nazywamy ją **iloczynem** (lub **częścią wspólną**) podprzestrzeni X_t.

Uwaga

Niech $\{X_t\}_{t \in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni liniowej V. Wówczas

$$\bigcap_{t \in T} X_t$$

jest podprzestrzenią V. Nazywamy ją **iloczynem** (lub **częścią wspólną**) podprzestrzeni X_t.

Przykłady:

- podprzestrzeń $V \subseteq \mathbb{R}^3$ opisana układem równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

  jest częścią wspólną podprzestrzeni opisanych układami $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ oraz $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

Uwaga

Niech $\{X_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni liniowej V. Wówczas

$$\bigcap_{t\in T} X_t$$

jest podprzestrzenią V. Nazywamy ją **iloczynem** (lub **częścią wspólną**) podprzestrzeni X_t.

Przykłady:

- jeśli V_m to podprzestrzeń $K[x]$ złożona z wielomianów, które mają współczynnik 0 przy jednomianie x^m, to

$$\bigcap_{m\geq 2} V_m = K_{\leq 1}[x].$$

Definicja

Jeśli dla pewnych podprzestrzeni X, Y przestrzeni liniowej V każdy wektor $\alpha \in V$ da się przedstawić jednoznacznie w postaci sumy wektorów $x \in X$ oraz $y \in Y$ to mówimy, że V jest **sumą prostą** podprzestrzeni X, Y, ozn. $V = X \oplus Y$

Definicja

Jeśli dla pewnych podprzestrzeni X, Y przestrzeni liniowej V każdy wektor $\alpha \in V$ da się przedstawić jednoznacznie w postaci sumy wektorów $x \in X$ oraz $y \in Y$ to mówimy, że V jest **sumą prostą** podprzestrzeni X, Y, ozn. $V = X \oplus Y$

Przykłady:

- Dla każdego wektora $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ istnieje dokładnie jeden rozkład na sumę elementów z $\mathrm{lin}(1, 1)$ oraz $\mathrm{lin}(0, 1)$:

$$(x, y) = (x, x) + (0, y - x).$$

Definicja

Jeśli dla pewnych podprzestrzeni X, Y przestrzeni liniowej V każdy wektor $\alpha \in V$ da się przedstawić jednoznacznie w postaci sumy wektorów $x \in X$ oraz $y \in Y$ to mówimy, że V jest **sumą prostą** podprzestrzeni X, Y, ozn. $V = X \oplus Y$

Przykłady:

- Dla każdego wektora $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ istnieje dokładnie jeden rozkład na sumę elementów z $\mathrm{lin}(1, 1)$ oraz $\mathrm{lin}(0, 1)$:
$$(x, y) = (x, x) + (0, y - x).$$
- Każdy ciąg zbieżny o wyrazach rzeczywistych można w jednoznaczny sposób przedstawić jako sumę ciągu stałego i ciągu zbieżnego do 0,

Definicja

Jeśli dla pewnych podprzestrzeni X, Y przestrzeni liniowej V każdy wektor $\alpha \in V$ da się przedstawić jednoznacznie w postaci sumy wektorów $x \in X$ oraz $y \in Y$ to mówimy, że V jest **sumą prostą** podprzestrzeni X, Y, ozn. $V = X \oplus Y$

Przykłady:

- Dla każdego wektora $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ istnieje dokładnie jeden rozkład na sumę elementów z $\mathrm{lin}(1, 1)$ oraz $\mathrm{lin}(0, 1)$:
$$(x, y) = (x, x) + (0, y - x).$$
- Każdy ciąg zbieżny o wyrazach rzeczywistych można w jednoznaczny sposób przedstawić jako sumę ciągu stałego i ciągu zbieżnego do 0,
- Każdą funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej, bo mamy rozkład:
$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \text{ oraz...}$$

Uwaga

Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = V_1 \oplus V_2$,

(2) $V = V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Uwaga

Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = V_1 \oplus V_2$,

(2) $V = V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Dowód (1) $\Rightarrow$ (2).

- Dla każdego $\alpha \in V$ mamy $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, gdzie $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$, więc $V = V_1 + V_2$.

Uwaga

Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = V_1 \oplus V_2$,

(2) $V = V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Dowód (1) $\Rightarrow$ (2).

- Dla każdego $\alpha \in V$ mamy $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, gdzie $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$, więc $V = V_1 + V_2$.
- Gdyby $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$, to istniałby niezerowy wektor $\alpha \in V_1 \cap V_2$.

Uwaga

Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = V_1 \oplus V_2$,

(2) $V = V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Dowód (1) $\Rightarrow$ (2).

- Dla każdego $\alpha \in V$ mamy $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, gdzie $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$, więc $V = V_1 + V_2$.
- Gdyby $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$, to istniałby niezerowy wektor $\alpha \in V_1 \cap V_2$.
- Wtedy jednak mamy dwa rozkłady: $\alpha = \alpha + 0 = 0 + \alpha$ elementu α na sumę elementów z V_1 oraz V_2, sprzeczność.

Uwaga

Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = V_1 \oplus V_2$,

(2) $V = V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Dowód (2) $\Rightarrow$ (1).

- Wykażemy, że każdy wektor $\alpha \in V$ daje się jednoznacznie przedstawić jako suma wektora z V_1 i wektora z V_2.

Uwaga

Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = V_1 \oplus V_2$,

(2) $V = V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Dowód (2) $\Rightarrow$ (1).

- Wykażemy, że każdy wektor $\alpha \in V$ daje się jednoznacznie przedstawić jako suma wektora z V_1 i wektora z V_2.
- Skoro $V = V_1 + V_2$, to istnieją $\alpha_1 \in V_1$ oraz $\alpha_2 \in V_2$ spełniające $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Uwaga

Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = V_1 \oplus V_2$,

(2) $V = V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Dowód (2) $\Rightarrow$ (1).

- Wykażemy, że każdy wektor $\alpha \in V$ daje się jednoznacznie przedstawić jako suma wektora z V_1 i wektora z V_2.
- Skoro $V = V_1 + V_2$, to istnieją $\alpha_1 \in V_1$ oraz $\alpha_2 \in V_2$ spełniające $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.
- Przypuśćmy, że $\alpha = \alpha_1' + \alpha_2'$, dla pewnych $\alpha_1' \in V_1$, $\alpha_2' \in V_2$.
- Wtedy, $\alpha_1 - \alpha_1' = \alpha_2' - \alpha_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Zatem $\alpha_1 = \alpha_1'$ oraz $\alpha_2 = \alpha_2'$.

Formuła Grassmanna

Niech V_1, V_2 będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V. Wówczas podprzestrzenie $V_1 \cap V_2$ oraz $V_1 + V_2$ też są skończenie wymiarowe i zachodzi:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Formuła Grassmanna

Niech V_1, V_2 będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V. Wówczas podprzestrzenie $V_1 \cap V_2$ oraz $V_1 + V_2$ też są skończenie wymiarowe i zachodzi:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Dowód:

- Niech $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ będzie bazą przestrzeni $V_1 \cap V_2$.

Formuła Grassmanna

Niech V_1, V_2 będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V. Wówczas podprzestrzenie $V_1 \cap V_2$ oraz $V_1 + V_2$ też są skończenie wymiarowe i zachodzi:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Dowód:

- Niech $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ będzie bazą przestrzeni $V_1 \cap V_2$.
- Na mocy twierdzenia Steinitza istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V_1$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_l \in V_2$ takie, że

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) - \text{ baza } V_1$$

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \beta_1, \ldots, \beta_l) - \text{ baza } V_2.$$

Formuła Grassmanna

Niech V_1, V_2 będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V. Wówczas podprzestrzenie $V_1 \cap V_2$ oraz $V_1 + V_2$ też są skończenie wymiarowe i zachodzi:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Dowód:

- Niech $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ będzie bazą przestrzeni $V_1 \cap V_2$.
- Na mocy twierdzenia Steinitza istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V_1$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_l \in V_2$ takie, że

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) - \text{ baza } V_1$$
$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \beta_1, \ldots, \beta_l) - \text{ baza } V_2.$$

- Pokażemy, że

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l)$$

  jest bazą $V_1 + V_2$.

Dowód (cd.):

- Przypuśćmy, że dla pewnych $c_1, \ldots, c_m, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l \in K$ mamy:

$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0.$$

Dowód (cd.):

- Przypuśćmy, że dla pewnych $c_1, \ldots, c_m, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l \in K$ mamy:

$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0.$$

- Stąd wynika, że

$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = -(b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l).$$

Dowód (cd.):

- Przypuśćmy, że dla pewnych $c_1, \ldots, c_m, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l \in K$ mamy:
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0.$$
- Stąd wynika, że
$$\underbrace{c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k}_{\in V_1} = -(b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l).$$

Dowód (cd.):

- Przypuśćmy, że dla pewnych $c_1, \ldots, c_m, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l \in K$ mamy:

$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0.$$

- Stąd wynika, że

$$\underbrace{c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k}_{\in V_1} = -(\underbrace{b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l}_{\in V_1}).$$

Dowód (cd.):

- Przypuśćmy, że dla pewnych $c_1, \ldots, c_m, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l \in K$ mamy:

$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0.$$

- Stąd wynika, że

$$\underbrace{c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k}_{\in V_1} = -(\underbrace{b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l}_{\in V_1}).$$

- Zatem $b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l \in V_1 \cap V_2$.

Dowód (cd.):

- Przypuśćmy, że dla pewnych $c_1, \ldots, c_m, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l \in K$ mamy:

$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0.$$

- Stąd wynika, że

$$\underbrace{c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k}_{\in V_1} = -(\underbrace{b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l}_{\in V_1}).$$

- Zatem $b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l \in V_1 \cap V_2$.
- A zatem dla pewnych $c_1', \ldots, c_m' \in K$ mamy:

$$b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = c_1'\gamma_1 + \ldots + c_m'\gamma_m.$$

Dowód (cd.):

- Przypuśćmy, że dla pewnych $c_1, \ldots, c_m, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l \in K$ mamy:

$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0.$$

- Stąd wynika, że

$$\underbrace{c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k}_{\in V_1} = -(\underbrace{b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l}_{\in V_1}).$$

- Zatem $b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l \in V_1 \cap V_2$.
- A zatem dla pewnych $c'_1, \ldots, c'_m \in K$ mamy:

$$b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = c'_1\gamma_1 + \ldots + c'_m\gamma_m.$$

- Stąd $b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l - c'_1\gamma_1 - \ldots - c'_m\gamma_m = 0$. Ale $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \beta_1, \ldots, \beta_l$ to baza V_2, zatem:

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_l = c'_1 = \ldots = c'_m = 0$$

Dowód (cd.):

- A zatem zamiast

$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0$$

mamy

$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$$

Dowód (cd.):

- A zatem zamiast
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0$$
mamy
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$$
- Stąd wynika, że
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

Dowód (cd.):

- A zatem zamiast
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0$$
mamy
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$$
- Stąd wynika, że
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$
- Ale $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – baza V_1, czyli:
$$c_1 = \ldots = c_m = a_1 = \ldots = a_k = 0.$$

Dowód (cd.):

- A zatem zamiast
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0$$
mamy
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$$
- Stąd wynika, że
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$
- Ale $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – baza V_1, czyli:
$$c_1 = \ldots = c_m = a_1 = \ldots = a_k = 0.$$
- A zatem układ $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$ – liniowo niezależny.

Dowód (cd.):

- A zatem zamiast
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + b_1\beta_1 + \ldots + b_l\beta_l = 0$$
mamy
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$$
- Stąd wynika, że
$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_m\gamma_m + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$
- Ale $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – baza V_1, czyli:
$$c_1 = \ldots = c_m = a_1 = \ldots = a_k = 0.$$
- A zatem układ $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$ – liniowo niezależny.
- $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ to baza V_1 oraz $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \beta_1, \ldots, \beta_l$ to baza V_2, czyli
$$V_1 + V_2 = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l).$$

Wnioski:

1. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni V. Załóżmy, że $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:
   - $V = V_1 \oplus V_2$,
   - $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

Wnioski:

1. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni V. Załóżmy, że $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:
    - $V = V_1 \oplus V_2$,
    - $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.
2. Dla każdej podprzestrzeni przestrzeni skończenie wymiarowej V istnieje taka podprzestrzeń $U \subset V$, że $V = W \oplus U$.

Wnioski:

1. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni V. Załóżmy, że $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:
   - $V = V_1 \oplus V_2$,
   - $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.
2. Dla każdej podprzestrzeni przestrzeni skończenie wymiarowej V istnieje taka podprzestrzeń $U \subset V$, że $V = W \oplus U$.
3. Z równości $V = X \oplus Y = X \oplus Z$ nie wynika, że $Y = Z$, ale jeśli $\dim(V) < \infty$, to $\dim(Y) = \dim(Z)$.

Definicja-uwaga

Niech $\{V_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas:

- iloczyn $\bigcap\limits_{t\in T} V_t$ jest podprzestrzenią V,
- suma: $\sum\limits_{t\in T} V_i = \{a_{t_1} + \ldots + a_{t_r} | \alpha_{t_i} \in V_{t_i}, r \in \mathbb{N}\}$ jest podprzestrzenią V.

W przypadku $T = \{1, \ldots, n\}$ piszemy:

$$\bigcap_{t\in T} V_t = V_1 \cap \ldots \cap C_n, \quad \sum_{t\in T} V_t = V_1 + \ldots + V_n.$$

Definicja

Mówimy, że przestrzeń V jest **sumą prostą rodziny podprzestrzeni** $\{V_t\}_{t\in T}$ jeśli każdy wektor $\alpha \in V$ daje się przedstawić jednoznacznie jako suma

$$\alpha_{t_1} + \ldots + \alpha_{t_r},$$

gdzie $\alpha_{t_i} \in V_{t_i}$, dla pewnych parami różnych $t_i \in T$. Wówczas piszemy:

$$V = \bigoplus_{t\in T} V_t,$$

a w przypadku, gdy $T = \{1, \ldots, n\}$ po prostu $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$.

Uwaga

Niech $\{V_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas $V = \bigoplus_{t\in T} V_t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \sum_{t\in T} V_t$ oraz dla każdych $t_0, t_1, \ldots, t_k \in T$ zachodzi:

$$V_{t_0} \cap \sum_{i=1}^{k} V_{t_i} = \{0\}.$$

Uwaga

Niech $\{V_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni V. Wówczas $V = \bigoplus_{t\in T} V_t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \sum_{t\in T} V_t$ oraz dla każdych $t_0, t_1, \ldots, t_k \in T$ zachodzi:

$$V_{t_0} \cap \sum_{i=1}^{k} V_{t_i} = \{0\}.$$

W szczególności aby mieć sumę prostą $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ nie wystarczy, aby mieć

$$V = V_1 + V_2 + V_3, \quad \text{oraz} \quad V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}.$$

To złe „uogólnienie". Drugi warunek trzeba zastąpić układem warunków:

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{0\}, \quad V_2 \cap (V_1 + V_3) = \{0\}, \quad V_3 \cap (V_1 + V_2) = \{0\}.$$