Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 6, 24.11.2020 r.

Na poprzednim wykładzie:

- układy liniowo zależne i liniowo niezależne,
- baza i wymiar przestrzeni liniowej.
- współrzędne wektora w bazie,
- twierdzenie o równoliczności baz - do uzupełnienia.

Problem: co mówi nam o przestrzeni liniowej V informacja:

$$V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)?$$

Problem: jak opisać wszystkie podprzestrzenie przestrzeni K^n?

Definicja 1.

Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni V nad ciałem K nazwiemy **liniowo zależnym**, jeśli istnieją elementy $a_1, \ldots, a_k$ ciała K, nie wszystkie równe 0, spełniające:

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

Definicja 2.

Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni V nazwiemy **liniowo niezależnym**, jeśli nie jest liniowo zależny. Innymi słowy, dla takiego układu wektorów z równości

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0,$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$ wynika, że $a_1 = \ldots = a_k = 0$.

Pusty układ wektorów uważamy za liniowo niezależny.

BYŁO

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Uwaga 3. - DO UWODODNIENIA

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni V i niech wektor $\alpha \in V$. Następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.

Uwaga 3.

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni V i niech wektor $\alpha \in V$. Następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$,

(b) układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.

Uwaga 3.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni V i niech wektor $\alpha \in V$. Następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.

- Jeśli $\alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, to układ jest liniowo zależny, bo $\alpha = b_1\alpha_1 + \ldots + b_k\alpha_k$, czyli $\alpha - b_1\alpha_1 - \ldots - b_k\alpha_k = 0$.

Uwaga 3.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni V i niech wektor $\alpha \in V$. Następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.

- Jeśli $\alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, to układ jest liniowo zależny, bo $\alpha = b_1\alpha_1 + \ldots + b_k\alpha_k$, czyli $\alpha - b_1\alpha_1 - \ldots - b_k\alpha_k = 0$.
- Na odwrót: przypuśćmy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.

Uwaga 3.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni V i niech wektor $\alpha \in V$. Następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.

- Jeśli $\alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, to układ jest liniowo zależny, bo $\alpha = b_1\alpha_1 + \ldots + b_k\alpha_k$, czyli $\alpha - b_1\alpha_1 - \ldots - b_k\alpha_k = 0$.
- Na odwrót: przypuśćmy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.
- Istnieją wówczas $a, a_1, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe 0, spełniające

$$a\alpha + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

Uwaga 3.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni V i niech wektor $\alpha \in V$. Następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.

- Jeśli $\alpha \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, to układ jest liniowo zależny, bo $\alpha = b_1\alpha_1 + \ldots + b_k\alpha_k$, czyli $\alpha - b_1\alpha_1 - \ldots - b_k\alpha_k = 0$.
- Na odwrót: przypuśćmy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.
- Istnieją wówczas $a, a_1, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe 0, spełniające

$$a\alpha + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

- Gdyby $a = 0$, to $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, a działo by się to przy nie wszystkich $a_i = 0$, co przeczyłoby liniowej niezależności układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Uwaga 3.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni V i niech wektor $\alpha \in V$. Następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.

- Jeśli $\alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, to układ jest liniowo zależny, bo $\alpha = b_1\alpha_1 + \ldots + b_k\alpha_k$, czyli $\alpha - b_1\alpha_1 - \ldots - b_k\alpha_k = 0$.
- Na odwrót: przypuśćmy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.
- Istnieją wówczas $a, a_1, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe 0, spełniające

$$a\alpha + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

- Gdyby $a = 0$, to $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, a działo by się to przy nie wszystkich $a_i = 0$, co przeczyłoby liniowej niezależności układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.
- A zatem $a \neq 0$ i mamy

$$\alpha = -\frac{a_1}{a}\alpha_1 - \ldots - \frac{a_k}{a}\alpha_k, \quad \text{czyli} \quad \alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k).$$

Definicja 3.

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \text{lin}(S)$.

Twierdzenie 1.

Każda przestrzeń liniowa posiada bazę. Jeśli przestrzeń liniowa V posiada bazę złożoną z n wektorów, to każda baza przestrzeni V jest złożona z n wektorów.

Definicja 4.

Mówimy, że przestrzeń liniowa V jest n **wymiarowa**, jeśli V posiada bazę złożoną z n wektorów. Piszemy wówczas $\dim V = n$ i liczbę n nazywamy **wymiarem przestrzeni** V. Dla przestrzeni zerowej $V = \{0\}$ przyjmujemy $\dim V = 0$. Mówimy, że przestrzeń V jest **skończenie wymiarowa**, jeśli V jest n wymiarowa dla pewnego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jeśli V nie jest skończenie wymiarowa, to V nazywamy **nieskończenie wymiarową** i piszemy $\dim(V) = \infty$.

Twierdzenie (Steinitz, 1910).

Jeśli układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leżących w przestrzeni $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ jest liniowo niezależny, to:

(a) $k \leq m$,

(b) z układu $\beta_1, \ldots, \beta_m$ można wybrać taki podukład $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_{m-k}}$, że:

$$\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_{m-k}}).$$

Wniosek

(a) Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \leq m$, że $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

(b) Jeśli układy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V to $k = l$.

Wniosek

(a) Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $k \leq m$, że $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

(b) Jeśli układy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \dots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V to $k = l$.

Uwaga: to nam daje *prawie cały* dowód Twierdzenia 1.

- Punkt (a) oraz wcześniejsza uwaga oznaczają, że każda przestrzeń liniowa rozpięta przez skończony układ wektorów ma bazę!
- Punkt (b) oznacza, że jeśli przestrzeń liniowa ma n-elementową bazę, to każda jej baza ma n elementów.

W ten sposób pojęcie wymiaru jest dobrze określone
(dla przestrzeni liniowych dających się rozpiąć na układzie skończenie wielu wektorów).

Wniosek

(a) Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $k \leq m$, że $W = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

(b) Jeśli układy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \dots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V to $k = l$.

Dowód (a)

- Weźmy najdłuższy możliwy liniowo niezależny układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ w W (na mocy tw. Steinitza długość układu liniowo niezależnego w W jest $\leq m$).

Wniosek

(a) Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \leq m$, że $W = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

(b) Jeśli układy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V to $k = l$.

Dowód (a)

- Weźmy najdłuższy możliwy liniowo niezależny układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ w W (na mocy tw. Steinitza długość układu liniowo niezależnego w W jest $\leq m$).
- Inkluzja $\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subseteq W$, jest oczywista, bo skoro wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ należą do W, to każda ich kombinacja liniowa też (bo W to podprzestrzeń).

Wniosek

(a) Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \leq m$, że $W = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

(b) Jeśli układy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V to $k = l$.

Dowód (a)

- Weźmy najdłuższy możliwy liniowo niezależny układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ w W (na mocy tw. Steinitza długość układu liniowo niezależnego w W jest $\leq m$).
- Inkluzja $\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subseteq W$, jest oczywista, bo skoro wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ należą do W, to każda ich kombinacja liniowa też (bo W to podprzestrzeń).
- Weźmy dowolny wektor $\alpha \in W$. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest dłuższy niż układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, więc jest liniowo zależny.

Wniosek

(a) Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \leq m$, że $W = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

(b) Jeśli układy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V to $k = l$.

Dowód (a)

- Weźmy najdłuższy możliwy liniowo niezależny układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ w W (na mocy tw. Steinitza długość układu liniowo niezależnego w W jest $\leq m$).
- Inkluzja $\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subseteq W$, jest oczywista, bo skoro wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ należą do W, to każda ich kombinacja liniowa też (bo W to podprzestrzeń).
- Weźmy dowolny wektor $\alpha \in W$. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest dłuższy niż układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, więc jest liniowo zależny.
- Na mocy Uwagi 2: $\alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Wobec dowolności α otrzymujemy drugą inkluzję $\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \supseteq W$.

Wniosek

(a) Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \leq m$, że $W = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

(b) Jeśli układy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V to $k = l$.

Dowód (b).

- Skoro układy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V, to
$$\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \text{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l).$$
W szczególności:

Wniosek

(a) Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $k \leq m$, że $W = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

(b) Jeśli układy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \dots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V to $k = l$.

Dowód (b).

- Skoro układy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \dots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V, to
$$\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \text{lin}(\alpha'_1, \dots, \alpha'_l).$$
  W szczególności:
- układ liniowo niezależny $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ zawarty jest w $\text{lin}(\alpha'_1, \dots, \alpha'_l)$, a więc na mocy tw. Steinitza $k \leq l$,

Wniosek

(a) Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, to w W istnieje taki układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \leq m$, że $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

(b) Jeśli układy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V to $k = l$.

Dowód (b).

- Skoro układy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oraz $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ są bazami przestrzeni V, to
$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \mathrm{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l).$$
W szczególności:
- układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ zawarty jest w $\mathrm{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l)$, a więc na mocy tw. Steinitza $k \leq l$,
- układ liniowo niezależny $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ zawarty jest w $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, a więc na mocy tw. Steinitza $l \leq k$.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a).

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a).
- Stosujemy indukcję ze względu na m. Dla $m = 1$ twierdzenie jest oczywiste, bo jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leżą w $\mathrm{lin}(\beta_1)$, to każdy z nich jest postaci $a_i \cdot \beta_1$, zaś układ $a_1\beta_1, a_2\beta_1, \ldots, a_k\beta_1$ jest liniowo niezależny tylko dla $k = 1$.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a).
- Stosujemy indukcję ze względu na m. Dla $m = 1$ twierdzenie jest oczywiste, bo jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leżą w $\operatorname{lin}(\beta_1)$, to każdy z nich jest postaci $a_i \cdot \beta_1$, zaś układ $a_1\beta_1, a_2\beta_1, \ldots, a_k\beta_1$ jest liniowo niezależny tylko dla $k = 1$.
- Przechodzimy do kroku indukcyjnego. Mamy układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ w przestrzeni $V = \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a).
- Stosujemy indukcję ze względu na m. Dla $m = 1$ twierdzenie jest oczywiste, bo jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leżą w $\mathrm{lin}(\beta_1)$, to każdy z nich jest postaci $a_i \cdot \beta_1$, zaś układ $a_1\beta_1, a_2\beta_1, \ldots, a_k\beta_1$ jest liniowo niezależny tylko dla $k = 1$.
- Przechodzimy do kroku indukcyjnego. Mamy układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ w przestrzeni $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.
- Weźmy takie a_{ij}, dla $1 \le i \le k$, $1 \le j \le m$, że:

$$\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1m}\beta_m, \quad \ldots, \quad \alpha_k = a_{k1}\beta_1 + a_{k2}\beta_2 + \ldots + a_{km}\beta_m.$$

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a).
- Stosujemy indukcję ze względu na m. Dla $m = 1$ twierdzenie jest oczywiste, bo jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leżą w $\mathrm{lin}(\beta_1)$, to każdy z nich jest postaci $a_i \cdot \beta_1$, zaś układ $a_1\beta_1, a_2\beta_1, \ldots, a_k\beta_1$ jest liniowo niezależny tylko dla $k = 1$.
- Przechodzimy do kroku indukcyjnego. Mamy układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ w przestrzeni $V = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.
- Weźmy takie a_{ij}, dla $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$, że:

$$\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1m}\beta_m, \quad \ldots, \quad \alpha_k = a_{k1}\beta_1 + a_{k2}\beta_2 + \ldots + a_{km}\beta_m.$$

- Po ewentualnym przenumerowaniu $\beta_1, \ldots, \beta_m$ możemy zakładać, że $a_{11} \neq 0$, bo żaden wektor z układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie może być zerowy.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a).
- Stosujemy indukcję ze względu na m. Dla $m = 1$ twierdzenie jest oczywiste, bo jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leżą w $\text{lin}(\beta_1)$, to każdy z nich jest postaci $a_i \cdot \beta_1$, zaś układ $a_1\beta_1, a_2\beta_1, \ldots, a_k\beta_1$ jest liniowo niezależny tylko dla $k = 1$.
- Przechodzimy do kroku indukcyjnego. Mamy układ liniowo niezależny $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ w przestrzeni $V = \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.
- Weźmy takie a_{ij}, dla $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$, że:

$$\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1m}\beta_m, \quad \ldots, \quad \alpha_k = a_{k1}\beta_1 + a_{k2}\beta_2 + \ldots + a_{km}\beta_m.$$

- Po ewentualnym przenumerowaniu $\beta_1, \ldots, \beta_m$ możemy zakładać, że $a_{11} \neq 0$, bo żaden wektor z układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie może być zerowy.
- Dla $i = 2, 3, \ldots, k$ określamy układ wektorów postaci:

$$\gamma_i = \alpha_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\alpha_1 =$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{a_{i1}}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{im}\beta_m}_{\alpha_i} - \frac{\boldsymbol{a_{i1}}}{\boldsymbol{a_{11}}}\underbrace{\left(\boldsymbol{a_{11}}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1m}\beta_m\right)}_{\alpha_1}.$$

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a), cd.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a), cd.
- Mamy $\gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1} \subseteq \mathrm{lin}(\beta_2, \ldots, \beta_m)$.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a), cd.
- Mamy $\gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1} \subseteq \mathrm{lin}(\beta_2, \ldots, \beta_m)$.
- Przekonajmy się, że układ $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ jest liniowo niezależny.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a), cd.
- Mamy $\gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1} \subseteq \mathrm{lin}(\beta_2, \ldots, \beta_m)$.
- Przekonajmy się, że układ $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ jest liniowo niezależny.
- Załóżmy przeciwnie, że dla pewnych $c_2, \ldots, c_k \in K$, nie wszystkich równych 0, mamy $c_2\gamma_2 + \ldots + c_k\gamma_k = 0$, równoważnie
$$c_2\left(\alpha_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right) + c_3\left(\alpha_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}\alpha_1\right) + \ldots + c_k\left(\alpha_r - \frac{a_{r1}}{a_{11}}\alpha_1\right) = 0.$$

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a), cd.
- Mamy $\gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1} \subseteq \mathrm{lin}(\beta_2, \ldots, \beta_m)$.
- Przekonajmy się, że układ $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ jest liniowo niezależny.
- Załóżmy przeciwnie, że dla pewnych $c_2, \ldots, c_k \in K$, nie wszystkich równych 0, mamy $c_2\gamma_2 + \ldots + c_k\gamma_k = 0$, równoważnie
$$c_2\left(\alpha_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right) + c_3\left(\alpha_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}\alpha_1\right) + \ldots + c_k\left(\alpha_r - \frac{a_{r1}}{a_{11}}\alpha_1\right) = 0.$$
- Równoważnie
$$-\frac{c_2a_{21} + c_3a_{31} + \ldots + c_ka_{k1}}{a_{11}}\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k = 0.$$

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a), cd.
- Mamy $\gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1} \subseteq \mathrm{lin}(\beta_2, \ldots, \beta_m)$.
- Przekonajmy się, że układ $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ jest liniowo niezależny.
- Załóżmy przeciwnie, że dla pewnych $c_2, \ldots, c_k \in K$, nie wszystkich równych 0, mamy $c_2\gamma_2 + \ldots + c_k\gamma_k = 0$, równoważnie

$$c_2\left(\alpha_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right) + c_3\left(\alpha_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}\alpha_1\right) + \ldots + c_k\left(\alpha_r - \frac{a_{r1}}{a_{11}}\alpha_1\right) = 0.$$

- Równoważnie

$$-\frac{c_2a_{21} + c_3a_{31} + \ldots + c_ka_{k1}}{a_{11}}\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k = 0.$$

- Skoro jednak układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny, to $c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$, czyli uzyskujemy sprzeczność z założeniem, że nie wszystkie c_i są równe 0. A zatem układ $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ jest liniowo niezależny.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (a), cd.
- Mamy $\gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1} \subseteq \mathrm{lin}(\beta_2, \ldots, \beta_m)$.
- Przekonajmy się, że układ $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ jest liniowo niezależny.
- Załóżmy przeciwnie, że dla pewnych $c_2, \ldots, c_k \in K$, nie wszystkich równych 0, mamy $c_2\gamma_2 + \ldots + c_k\gamma_k = 0$, równoważnie
$$c_2\left(\alpha_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1\right) + c_3\left(\alpha_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}\alpha_1\right) + \ldots + c_k\left(\alpha_r - \frac{a_{r1}}{a_{11}}\alpha_1\right) = 0.$$
- Równoważnie
$$-\frac{c_2a_{21} + c_3a_{31} + \ldots + c_ka_{k1}}{a_{11}}\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k = 0.$$
- Skoro jednak układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny, to $c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$, czyli uzyskujemy sprzeczność z założeniem, że nie wszystkie c_i są równe 0. A zatem układ $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ jest liniowo niezależny.
- A zatem z założenia indukcyjnego zastosowanego do układu liniowo niezależnego $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ zawartego w $\mathrm{lin}(\beta_2, \ldots, \beta_m)$ wynika, że $k - 1 \leq m - 1$. A zatem $k \leq m$, co kończy dowód (a).

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (b). Mamy liniowo niezależne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (b). Mamy liniowo niezależne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.
- Niech $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ będzie najdłuższym takim podukładem w $\beta_1, \ldots, \beta_m$, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ jest liniowo niezależny (na mocy punktu (a)).

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (b). Mamy liniowo niezależne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.
- Niech $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ będzie najdłuższym takim podukładem w $\beta_1, \ldots, \beta_m$, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ jest liniowo niezależny (na mocy punktu (a)).
- Zatem dla każdego $1 \leq j \leq m$ dłuższy układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}, \beta_j$ jest liniowo zależny.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (b). Mamy liniowo niezależne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.
- Niech $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ będzie najdłuższym takim podukładem w $\beta_1, \ldots, \beta_m$, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ jest liniowo niezależny (na mocy punktu (a)).
- Zatem dla każdego $1 \leq j \leq m$ dłuższy układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}, \beta_j$ jest liniowo zależny.
- Z implikacji $(b) \Rightarrow (a)$ w Uwadze 3 mamy zatem:

$$\beta_j \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (b). Mamy liniowo niezależne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.
- Niech $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ będzie najdłuższym takim podukładem w $\beta_1, \ldots, \beta_m$, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ jest liniowo niezależny (na mocy punktu (a)).
- Zatem dla każdego $1 \leq j \leq m$ dłuższy układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}, \beta_j$ jest liniowo zależny.
- Z implikacji $(b) \Rightarrow (a)$ w Uwadze 3 mamy zatem:

$$\beta_j \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$

- W szczególności $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \subseteq \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s})$.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (b). Mamy liniowo niezależne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.
- Niech $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ będzie najdłuższym takim podukładem w $\beta_1, \ldots, \beta_m$, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ jest liniowo niezależny (na mocy punktu (a)).
- Zatem dla każdego $1 \leq j \leq m$ dłuższy układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}, \beta_j$ jest liniowo zależny.
- Z implikacji $(b) \Rightarrow (a)$ w Uwadze 3 mamy zatem:

$$\beta_j \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$

- W szczególności $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \subseteq \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s})$.
- Oczywiście wszystkie α_i są kombinacjami liniowymi β_j więc

$$\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (b). Mamy liniowo niezależne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.
- Niech $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ będzie najdłuższym takim podukładem w $\beta_1, \ldots, \beta_m$, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ jest liniowo niezależny (na mocy punktu (a)).
- Zatem dla każdego $1 \leq j \leq m$ dłuższy układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}, \beta_j$ jest liniowo zależny.
- Z implikacji $(b) \Rightarrow (a)$ w Uwadze 3 mamy zatem:

$$\beta_j \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$

- W szczególności $\operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \subseteq \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s})$.
- Oczywiście wszystkie α_i są kombinacjami liniowymi β_j więc

$$\operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$

- Z udowodnionego już punktu (a) wynika, że $k + s \leq m$, a więc $s \leq m - k$.

Dowód tw. Steinitza:

- Dowód punktu (b). Mamy liniowo niezależne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.
- Niech $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ będzie najdłuższym takim podukładem w $\beta_1, \ldots, \beta_m$, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ jest liniowo niezależny (na mocy punktu (a)).
- Zatem dla każdego $1 \leq j \leq m$ dłuższy układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}, \beta_j$ jest liniowo zależny.
- Z implikacji $(b) \Rightarrow (a)$ w Uwadze 3 mamy zatem:

$$\beta_j \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$

- W szczególności $\text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \subseteq \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s})$.
- Oczywiście wszystkie α_i są kombinacjami liniowymi β_j więc

$$\text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}).$$

- Z udowodnionego już punktu (a) wynika, że $k + s \leq m$, a więc $s \leq m - k$.
- Stąd dołączając do układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ byle jakie $m - k - s$ wektorów spośród β_i, dla $i \neq i_1, \ldots, i_s$, otrzymujemy układ spełniający

$$\text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_{m-k}}).$$

Definicja 5.

Mówimy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni V jest

- **maksymalnym układem liniowo niezależnym,** jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny i każdy większy układ – to znaczy taki układ wektorów przestrzeni V, który zawiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jako podukład właściwy – jest liniowo zależny

Definicja 5.

Mówimy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni V jest

- **maksymalnym układem liniowo niezależnym,** jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny i każdy większy układ – to znaczy taki układ wektorów przestrzeni V, który zawiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jako podukład właściwy – jest liniowo zależny
- **minimalnym układem rozpinającym** V, jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozpina V i żaden mniejszy układ – to znaczy żaden podukład właściwy układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie rozpina V.

Definicja 5.

Mówimy, że układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni V jest

- **maksymalnym układem liniowo niezależnym,** jeśli $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny i każdy większy układ – to znaczy taki układ wektorów przestrzeni V, który zawiera $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jako podukład właściwy – jest liniowo zależny
- **minimalnym układem rozpinającym** V, jeśli $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ rozpina V i żaden mniejszy układ – to znaczy żaden podukład właściwy układu $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ nie rozpina V.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$.

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$.

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V.
- Gdyby układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie był maksymalny, to istniałby taki wektor $\alpha \in V$, że układ

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$$

byłby liniowo niezależny.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$.

- Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V.
- Gdyby układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ nie był maksymalny, to istniałby taki wektor $\alpha \in V$, że układ

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha$$

  byłby liniowo niezależny.
- Wówczas jednak, zgodnie z uwagą α nie może należeć do $\mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$.

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V.
- Gdyby układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie był maksymalny, to istniałby taki wektor $\alpha \in V$, że układ
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$$
byłby liniowo niezależny.
- Wówczas jednak, zgodnie z uwagą α nie może należeć do $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$
- To jest jednak niemożliwe, bo $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, zgodnie z definicją bazy.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$.

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V.
- Gdyby układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie był maksymalny, to istniałby taki wektor $\alpha \in V$, że układ

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$$

  byłby liniowo niezależny.
- Wówczas jednak, zgodnie z uwagą α nie może należeć do $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$
- To jest jednak niemożliwe, bo $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, zgodnie z definicją bazy.
- Zatem układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym niezależnym liniowo układem w V.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(ii) \Rightarrow (i)$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(ii) \Rightarrow (i)$.

- Skoro $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V, to jest on w szczególności liniowo niezależny.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(ii) \Rightarrow (i)$.

- Skoro $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V, to jest on w szczególności liniowo niezależny.
- Do pokazania, że $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest bazą V pozostaje wykazać, że $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*).

- Skoro $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V, to jest on w szczególności liniowo niezależny.
- Do pokazania, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą V pozostaje wykazać, że $V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.
- Jednak z maksymalności tego układu wynika, że dla każdego wektora $\alpha \in V$ układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(ii) \Rightarrow (i)$.

- Skoro $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V, to jest on w szczególności liniowo niezależny.
- Do pokazania, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą V pozostaje wykazać, że $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.
- Jednak z maksymalności tego układu wynika, że dla każdego wektora $\alpha \in V$ układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.
- W szczególności z uwagi wynika, że α jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(ii) \Rightarrow (i)$.

- Skoro $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V, to jest on w szczególności liniowo niezależny.
- Do pokazania, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą V pozostaje wykazać, że $V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.
- Jednak z maksymalności tego układu wynika, że dla każdego wektora $\alpha \in V$ układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.
- W szczególności z uwagi wynika, że α jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.
- A zatem istotnie $V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (iii)$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (iii)$.

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie (ponownie) bazą V.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (iii)$.

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie (ponownie) bazą V.
- Gdyby $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie był minimalnym układem rozpinającym V, to zawierałby podukład właściwy rozpinający V.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (iii)$.

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie (ponownie) bazą V.
- Gdyby $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie był minimalnym układem rozpinającym V, to zawierałby podukład właściwy rozpinający V.
- Weźmy jednak dowolny wektor spośród $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie należący do tego podukładu. Jest on kombinacją podukładu, bo podukład ten rozpina (ponoć) przestrzeń V.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(i) \Rightarrow (iii)$.

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie (ponownie) bazą V.
- Gdyby $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie był minimalnym układem rozpinającym V, to zawierałby podukład właściwy rozpinający V.
- Weźmy jednak dowolny wektor spośród $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie należący do tego podukładu. Jest on kombinacją podukładu, bo podukład ten rozpina (ponoć) przestrzeń V.
- Daje to sprzeczność z liniową niezależnością układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(iii) \Rightarrow (i)$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*).

- Mamy minimalny układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozpinający przestrzeń V.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji $(iii) \Rightarrow (i)$.

- Mamy minimalny układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozpinający przestrzeń V.
- Gdyby np. $\alpha_k = b_1\alpha_1 + \ldots + b_{k-1}\alpha_{k-1}$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*).

- Mamy minimalny układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozpinający przestrzeń V.
- Gdyby np. $\alpha_k = b_1\alpha_1 + \ldots + b_{k-1}\alpha_{k-1}$.
- Wówczas jednak $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$, bo dla dowolnego $\alpha \in V$:

$$\begin{aligned}\alpha &= a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = \\ &= a_1\alpha_! + \ldots + a_k(\underbrace{b_1\alpha_1 + \ldots + b_{k-1}\alpha_{k-1}}_{\alpha_k}) = \\ &= (a_1 + a_kb_1)\alpha_1 + \ldots + (a_{k-1} + a_kb_{k-1})\alpha_{k-1}.\end{aligned}$$

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(ii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Dowód implikacji (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*).

- Mamy minimalny układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rozpinający przestrzeń V.
- Gdyby np. $\alpha_k = b_1\alpha_1 + \ldots + b_{k-1}\alpha_{k-1}$.
- Wówczas jednak $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$, bo dla dowolnego $\alpha \in V$:

$$\begin{aligned}\alpha &= a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = \\ &= a_1\alpha_! + \ldots + a_k(\underbrace{b_1\alpha_1 + \ldots + b_{k-1}\alpha_{k-1}}_{\alpha_k}) = \\ &= (a_1 + a_k b_1)\alpha_1 + \ldots + (a_{k-1} + a_k b_{k-1})\alpha_{k-1}.\end{aligned}$$

- Sprzeczność z (iii).

Ważne wnioski:

- Podprzestrzeń przestrzeni rozpiętej na skończonym układzie wektorów jest skończenie wymiarowa. Jeśli W jest podprzestrzenią V i $\dim V = n$, to $\dim W \leq n$.

Ważne wnioski:

- Podprzestrzeń przestrzeni rozpiętej na skończonym układzie wektorów jest skończenie wymiarowa. Jeśli W jest podprzestrzenią V i $\dim V = n$, to $\dim W \leq n$.
- Każdy liniowo niezależny układ wektorów V można, dołączając pewną liczbę wektorów, uzupełnić do bazy przestrzeni V.

Ważne wnioski:

- Podprzestrzeń przestrzeni rozpiętej na skończonym układzie wektorów jest skończenie wymiarowa. Jeśli W jest podprzestrzenią V i $\dim V = n$, to $\dim W \leq n$.
- Każdy liniowo niezależny układ wektorów V można, dołączając pewną liczbę wektorów, uzupełnić do bazy przestrzeni V.
- Z każdego układu $\beta_1, \ldots, \beta_m$ rozpinającego V można wybrać bazę podprzestrzeni V.

Ważne wnioski:

- Podprzestrzeń przestrzeni rozpiętej na skończonym układzie wektorów jest skończenie wymiarowa. Jeśli W jest podprzestrzenią V i $\dim V = n$, to $\dim W \leq n$.
- Każdy liniowo niezależny układ wektorów V można, dołączając pewną liczbę wektorów, uzupełnić do bazy przestrzeni V.
- Z każdego układu $\beta_1, \ldots, \beta_m$ rozpinającego V można wybrać bazę podprzestrzeni V.
- Jeśli $\dim V = k$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależnym układem wektorów przestrzeni V, to $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni K.

Ważne wnioski:

- Podprzestrzeń przestrzeni rozpiętej na skończonym układzie wektorów jest skończenie wymiarowa. Jeśli W jest podprzestrzenią V i $\dim V = n$, to $\dim W \leq n$.
- Każdy liniowo niezależny układ wektorów V można, dołączając pewną liczbę wektorów, uzupełnić do bazy przestrzeni V.
- Z każdego układu $\beta_1, \ldots, \beta_m$ rozpinającego V można wybrać bazę podprzestrzeni V.
- Jeśli $\dim V = k$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależnym układem wektorów przestrzeni V, to $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni K.
- Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Wówczas $\dim W \leq \dim V$. Przy tym jeśli $\dim W = \dim V$, to $W = V$.

Twierdzenie 3.

Niech $A \in M_{m \times n}(K)$ oraz niech:

- $w(A) = \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A,
- $k(A) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, gdzie $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A.

Wówczas $\boldsymbol{w(A) = k(A)}$. Inaczej mówiąc: dla każdej macierzy A maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy A jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych kolumn macierzy A.

Twierdzenie 3.

Niech $A \in M_{m\times n}(K)$ oraz niech:

- $w(A) = \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A,
- $k(A) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \dots, \beta_n)$, gdzie $\beta_1, \dots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A.

Wówczas $\boldsymbol{w(A) = k(A)}$. Inaczej mówiąc: dla każdej macierzy A maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy A jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych kolumn macierzy A.

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 8}(\mathbb{R}).$$

- $w(A) = \dim(\operatorname{lin}((1,0,1,1,2,3,1,2),(4,1,3,1,0,0,1,1))) = 2$,
- $k(A) = \dim(\operatorname{lin}((1,4),(0,1),(1,3),(1,1),(2,0),(3,0),(1,1),(2,1))) = 2$.

Twierdzenie 3.

Niech $A \in M_{m \times n}(K)$ oraz niech:

- $w(A) = \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A,
- $k(A) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, gdzie $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A.

Wówczas $\boldsymbol{w(A) = k(A)}$. Inaczej mówiąc: dla każdej macierzy A maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy A jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych kolumn macierzy A.

Dowód. Niech $A' \in M_{m \times n}(K)$ będzie macierzą schodkową zredukowaną o wierszach $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m$ otrzymaną z A elementarnymi operacjami na wierszach. Niech $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r$ będą wszystkimi niezerowymi wierszami macierzy A'.

Twierdzenie 3.

Niech $A \in M_{m\times n}(K)$ oraz niech:

- $w(A) = \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A,
- $k(A) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, gdzie $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A.

Wówczas $\boldsymbol{w(A) = k(A)}$. Inaczej mówiąc: dla każdej macierzy A maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy A jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych kolumn macierzy A.

Dowód. Niech $A' \in M_{m\times n}(K)$ będzie macierzą schodkową zredukowaną o wierszach $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m$ otrzymaną z A elementarnymi operacjami na wierszach. Niech $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r$ będą wszystkimi niezerowymi wierszami macierzy A'.

Wówczas:

(i) $\operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \operatorname{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m)$ – to było na poprzednim wykładzie,
(ii) $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r$ jest bazą przestrzeni rozpiętej przez wiersze macierzy A.

Zatem $w(A) = r$.

Twierdzenie 3.

Niech $A \in M_{m \times n}(K)$ oraz niech:

- $w(A) = \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A,
- $k(A) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, gdzie $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A.

Wówczas $\boldsymbol{w(A) = k(A)}$. Inaczej mówiąc: dla każdej macierzy A maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy A jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych kolumn macierzy A.

Dowód (cd.) Niech $\beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_r}$ będą tymi kolumnami w macierzy A, w których po uzyskaniu postaci schodkowej zredukowanej A' stoi pierwszy niezerowy wyraz w odpowiednim niezerowym wierszu. Pokażemy, że wektory te stanowią bazę przestrzeni $\operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Dowód (cd.)

- Niech $\beta_{s_1}, \dots, \beta_{s_r}$ będą tymi kolumnami w macierzy A, w których po uzyskaniu postaci schodkowej zredukowanej A' stoi pierwszy niezerowy wyraz w odpowiednim niezerowym wierszu. Pokażemy, że wektory te stanowią bazę $\mathrm{lin}(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Dowód (cd.)

- Niech $\beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_r}$ będą tymi kolumnami w macierzy A, w których po uzyskaniu postaci schodkowej zredukowanej A' stoi pierwszy niezerowy wyraz w odpowiednim niezerowym wierszu. Pokażemy, że wektory te stanowią bazę $\text{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.
- Załóżmy, że istnieją $a_1, \ldots, a_r \in K$, że:

$$a_1 \begin{bmatrix} b_{s_1 1} \\ b_{s_1 2} \\ \vdots \\ b_{s_1 i} \\ \vdots \\ b_{s_1 j} \\ \vdots \\ b_{s_1 m} \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} b_{s_r 1} \\ b_{s_r 2} \\ \vdots \\ b_{s_r i} \\ \vdots \\ b_{s_r j} \\ \vdots \\ b_{s_r m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dowód (cd.)

- Niech $\beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_r}$ będą tymi kolumnami w macierzy A, w których po uzyskaniu postaci schodkowej zredukowanej A' stoi pierwszy niezerowy wyraz w odpowiednim niezerowym wierszu. Pokażemy, że wektory te stanowią bazę $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.
- Załóżmy, że istnieją $a_1, \ldots, a_r \in K$, że:

$$a_1 \begin{bmatrix} b_{s_1 1} \\ b_{s_1 2} \\ \vdots \\ b_{s_1 i} \\ \vdots \\ b_{s_1 j} \\ \vdots \\ b_{s_1 m} \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} b_{s_r 1} \\ b_{s_r 2} \\ \vdots \\ b_{s_r i} \\ \vdots \\ b_{s_r j} \\ \vdots \\ b_{s_r m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Wykonajmy operację elementarną na wierszach macierzy A. Wówczas...

Dowód (cd.)

- Na przykład dodajmy do j-tego wiersza i-ty przemnożony przez a:

$$a_1 \begin{bmatrix} b_{s_1 1} \\ b_{s_1 2} \\ \vdots \\ b_{s_1 i} \\ \vdots \\ b_{s_1 j} + a \cdot b_{s_1 i} \\ \vdots \\ b_{s_1 m} \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} b_{s_r 1} \\ b_{s_r 2} \\ \vdots \\ b_{s_r i} \\ \vdots \\ b_{s_r j} + a \cdot b_{s_r i} \\ \vdots \\ b_{s_r m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 + a \cdot 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dowód (cd.)

- Na przykład dodajmy do j-tego wiersza i-ty przemnożony przez a:

$$a_1 \begin{bmatrix} b_{s_1 1} \\ b_{s_1 2} \\ \vdots \\ b_{s_1 i} \\ \vdots \\ b_{s_1 j} + a \cdot b_{s_1 i} \\ \vdots \\ b_{s_1 m} \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} b_{s_r 1} \\ b_{s_r 2} \\ \vdots \\ b_{s_r i} \\ \vdots \\ b_{s_r j} + a \cdot b_{s_r i} \\ \vdots \\ b_{s_r m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 + a \cdot 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Powyższe r kolumn jest liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wyjściowe r kolumn jest liniowo niezależne.

Dowód (cd.)

- Na przykład dodajmy do j-tego wiersza i-ty przemnożony przez a:

$$a_1 \begin{bmatrix} b_{s_1 1} \\ b_{s_1 2} \\ \vdots \\ b_{s_1 i} \\ \vdots \\ b_{s_1 j} + a \cdot b_{s_1 i} \\ \vdots \\ b_{s_1 m} \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} b_{s_r 1} \\ b_{s_r 2} \\ \vdots \\ b_{s_r i} \\ \vdots \\ b_{s_r j} + a \cdot b_{s_r i} \\ \vdots \\ b_{s_r m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 + a \cdot 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Powyższe r kolumn jest liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wyjściowe r kolumn jest liniowo niezależne.
- A zatem wykonujemy operacje, wykonujemy, i dostajemy...

Dowód (cd.)

- I dostajemy kolumny macierzy zredukowanej A' (w r-tej kolumnie 1 jest w r-tym wierszu):

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dowód (cd.)

- I dostajemy kolumny macierzy zredukowanej A' (w r-tej kolumnie 1 jest w r-tym wierszu):

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Stąd $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$.

Dowód (cd.)

- I dostajemy kolumny macierzy zredukowanej A' (w r-tej kolumnie 1 jest w r-tym wierszu):

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Stąd $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$.
- A zatem $\beta_{s_1}, \ldots, \beta_{s_r}$ to układ liniowo niezależny. A czy jest to układ rozpinający?

Dowód (cd.)

- Weźmy $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in k(A)$. Szukamy $a_1, \ldots, a_n$ takich, że:

$$a_1 \begin{bmatrix} b_{s_1 1} \\ \vdots \\ b_{s_1 m} \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} b_{s_r 1} \\ \vdots \\ b_{s_r m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dowód (cd.)

- Weźmy $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in k(A)$. Szukamy $a_1, \dots, a_n$ takich, że:

$$a_1 \begin{bmatrix} b_{s_1 1} \\ \vdots \\ b_{s_1 m} \end{bmatrix} + \ldots + a_r \begin{bmatrix} b_{s_r 1} \\ \vdots \\ b_{s_r m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Dostajemy układ równań U o macierzy rozszerzonej, w której pierwsze r kolumn to kolumny $s_1, s_2, \dots, s_r$ macierzy A, a ostatnia kolumna to pewna kombinacja kolumn macierzy A. Sprowadzenie macierzy U do postaci zredukowanej odbywa się przy pomocy tych samych operacji, które sprowadzają A do A'. Macierz A' ma tylko r niezerowych wierszy. Zatem macierz zredukowana układu wyżej ma w pierwszych r kolumnach kolumny $s_1, s_2, \dots, s_r$ macierzy A', czyli

$$(1, 0, 0, \dots 0), (0, 1, 0, \dots 0), \dots (\underbrace{0, 0, \dots 1}_{r}, \dots 0),$$

zaś ostatnia kolumna ma tylko pierwsze r niezerowych współrzędnych (to kombinacja kolumn z A'). Zatem powyższy układ równań ma rozwiązanie.

Definicja 6.

Rzędem macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy liczbę:

$$\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A. Rząd macierzy oznaczamy przez $\boldsymbol{r(A)}$.

Definicja 6.

Rzędem macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy liczbę:

$$\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \dots, \beta_n),$$

gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A, zaś $\beta_1, \dots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A. Rząd macierzy oznaczamy przez $\boldsymbol{r(A)}$.

Wniosek z dowodu wyżej: rząd macierzy A równy jest liczbie niezerowych wierszy po doprowadzeniu A do postaci schodkowej.

Definicja 6.

Rzędem macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy liczbę:

$$\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ są wierszami macierzy A, zaś $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$ są kolumnami macierzy A. Rząd macierzy oznaczamy przez $\boldsymbol{r(A)}$.

Wniosek z dowodu wyżej: rząd macierzy A równy jest liczbie niezerowych wierszy po doprowadzeniu A do postaci schodkowej.

Przykłady:

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 1, \quad r\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Definicja 7.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$. Macierz $B = [b_{kl}] \in M_{n\times m}(K)$ spełniającą dla każdego $1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m$ warunek $b_{kl} = a_{lk}$ nazywamy **macierzą transponowaną** do A i oznaczamy A^T.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja 7.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$. Macierz $B = [b_{kl}] \in M_{n\times m}(K)$ spełniającą dla każdego $1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m$ warunek $b_{kl} = a_{lk}$ nazywamy **macierzą transponowaną** do A i oznaczamy A^T.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uwaga

Dla każdej macierzy A zachodzi $r(A) = r(A^T)$.

Twierdzenie Kroneckera-Capelli

Niech U będzie układem równań liniowych o współczynnikach w ciele K postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \; a_{12}x_2 + \ldots + \; a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

o macierzy współczynników A oraz rozszerzonej macierzy współczynników A_u. Wówczas:

(a) Układ U ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u)$,

Twierdzenie Kroneckera-Capelli

Niech U będzie układem równań liniowych o współczynnikach w ciele K postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

o macierzy współczynników A oraz rozszerzonej macierzy współczynników A_u. Wówczas:

(a) Układ U ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u)$,

(b) Przestrzeń rozwiązań układu jednorodnego odpowiadającego układowi U (gdy $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$) ma wymiar $n - r(A)$

Twierdzenie Kroneckera-Capelli

Niech U będzie układem równań liniowych o współczynnikach w ciele K postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

o macierzy współczynników A oraz rozszerzonej macierzy współczynników A_u.
Wówczas:

(a) Układ U ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_u)$,

(b) Przestrzeń rozwiązań układu jednorodnego odpowiadającego układowi U (gdy $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$) ma wymiar $n - r(A)$

(c) Jeśli α jest rozwiązaniem układu U, a W jest przestrzenią rozwiązań układu jednorodnego odpowiadającego układowi U, to zbiór rozwiązań układu U jest postaci

$$\alpha + W = \{\alpha + \beta, \mid \beta \in W\}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \; a_{12}x_2 + \ldots + \; a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^n$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^n$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:

- $x_1, \ldots, x_n$ jest rozwiązaniem układu U,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \; a_{12}x_2 + \ldots + \; a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^n$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:

- $x_1, \ldots, x_n$ jest rozwiązaniem układu U,

- $x_1\beta_1 + \ldots + x_n\beta_n = \beta$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \; a_{12}x_2 + \ldots + \; a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^n$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:
- $x_1, \ldots, x_n$ jest rozwiązaniem układu U,
- $x_1\beta_1 + \ldots + x_n\beta_n = \beta$,
- $\beta \in \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^n$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:

- $x_1, \ldots, x_n$ jest rozwiązaniem układu U,
- $x_1\beta_1 + \ldots + x_n\beta_n = \beta$,
- $\beta \in \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$,
- $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta)$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^n$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:
- $x_1, \ldots, x_n$ jest rozwiązaniem układu U,
- $x_1\beta_1 + \ldots + x_n\beta_n = \beta$,
- $\beta \in \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$,
- $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta)$,
- $\dim \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \dim \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta)$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (a).

- Weźmy $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in K^n$, które są kolumnami macierzy A_u. Wówczas mamy ciąg równoważnych stwierdzeń:

- $x_1, \ldots, x_n$ jest rozwiązaniem układu U,
- $x_1\beta_1 + \ldots + x_n\beta_n = \beta$,
- $\beta \in \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$,
- $\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta)$,
- $\dim \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \dim \mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta)$,
- $r(A) = r(A_u)$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0. \end{cases}$$

Dowód (b).

- Jeśli $r(A) = r$, to macierz A' uzyskana z A przez sprowadzenie do postaci schodkowej ma dokładnie r niezerowych wierszy.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0. \end{cases}$$

Dowód (b).

- Jeśli $r(A) = r$, to macierz A' uzyskana z A przez sprowadzenie do postaci schodkowej ma dokładnie r niezerowych wierszy.
- Zatem postać ogólna rozwiązania tego układu ma $n - r$ parametrów.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = 0 \\ \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0. \end{cases}$$

Dowód (b).

- Jeśli $r(A) = r$, to macierz A' uzyskana z A przez sprowadzenie do postaci schodkowej ma dokładnie r niezerowych wierszy.
- Zatem postać ogólna rozwiązania tego układu ma $n - r$ parametrów.
- Zatem przestrzeń rozwiązań układu równań ma wymiar $n - r$ (BYŁO)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n &= 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{cases}$$

Dowód (b).

- Jeśli $r(A) = r$, to macierz A' uzyskana z A przez sprowadzenie do postaci schodkowej ma dokładnie r niezerowych wierszy.
- Zatem postać ogólna rozwiązania tego układu ma $n - r$ parametrów.
- Zatem przestrzeń rozwiązań układu równań ma wymiar $n - r$ (BYŁO)

Przykład. Rozwiązanie ogólne układu U postaci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

ma dwa parametry x_3, x_4. Każde rozwiązanie jest postaci:

$$(-s - t, 0, s, t) = s(-1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1), \quad s, t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (c).

- Jeśli $\alpha = (s_1 \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem układu U, czyli

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + \ a_{12}s_2 + \ldots + \ a_{1n}s_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n & = b_m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Dowód (c).

- Jeśli $\alpha = (s_1 \ldots, s_n)$ jest rozwiązaniem układu U, czyli

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + \ a_{12}s_2 + \ldots + \ a_{1n}s_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n & = b_m. \end{cases}$$

- Wówczas $\gamma = (r_1, \ldots, r_n) \in K^n$ jest rozwiązaniem układu U wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma - \alpha$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego.

$$\begin{cases} a_{11}r_1 + \ldots + \ a_{1n}r_n & = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}r_1 + \ldots + a_{mn}r_n & = b_m. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}(s_1 - r_1) + \ldots + \ a_{1n}(s_n - r_n) & = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}(s_1 - r_1) + \ldots + a_{mn}(s_n - r_n) & = 0. \end{cases}$$

Kilka ważnych wniosków (krótkie dowody następnym razem):

- Układ U ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A_u) = r(A) = n$

Kilka ważnych wniosków (krótkie dowody następnym razem):

- Układ U ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A_u) = r(A) = n$
- Każda podprzestrzeń V przestrzeni K^n jest przestrzenią rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań liniowych U.

Kilka ważnych wniosków (krótkie dowody następnym razem):

- Układ U ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A_u) = r(A) = n$
- Każda podprzestrzeń V przestrzeni K^n jest przestrzenią rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań liniowych U.
- Jeśli $V \subseteq K^n$ oraz $\dim V = k$, to można tak dobrać układ U, by składał się z $n - k$ równań.

Kilka ważnych wniosków (krótkie dowody następnym razem):

- Układ U ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A_u) = r(A) = n$
- Każda podprzestrzeń V przestrzeni K^n jest przestrzenią rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań liniowych U.
- Jeśli $V \subseteq K^n$ oraz $\dim V = k$, to można tak dobrać układ U, by składał się z $n - k$ równań.
- Dla $V \subseteq K^n$, $\dim V = k$ oraz $i < n - k$ nie istnieje złożony z i równań układ równań liniowych o przestrzeni rozwiązań V.

Kilka ważnych wniosków (krótkie dowody następnym razem):

- Układ U ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A_u) = r(A) = n$
- Każda podprzestrzeń V przestrzeni K^n jest przestrzenią rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań liniowych U.
- Jeśli $V \subseteq K^n$ oraz $\dim V = k$, to można tak dobrać układ U, by składał się z $n - k$ równań.
- Dla $V \subseteq K^n$, $\dim V = k$ oraz $i < n - k$ nie istnieje złożony z i równań układ równań liniowych o przestrzeni rozwiązań V.

Definicja 8.

Jeśli $V \subseteq K^n$ jest przestrzenią rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych U, to mówimy, że przestrzeń V jest **opisana układem** U.

Kluczowe problemy na dalszą (i odległą) przyszłość.

- Czy mając dwie podprzestrzenie można z nich skontruować nowe podprzestrzenie? Jakie?
- Jak rozkładać przestrzeń na *niezależne podprzestrzenie*, i co to znaczy?
- Co się dzieje, gdy zaczynamy działać na przestrzeniach tak, by jedne *składowe* zostawały w miejscu, a inne nie?