Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 5, 17.11.2020 r.

Na poprzednim wykładzie:

- aksjomaty przestrzeni liniowej,
- przestrzenie liniowe ciągów, macierzy, wielomianów, itd.
- podprzestrzenie,
- kombinacje liniowe, przestrzeń rozpięta na układzie wektorów.

Problem: co mówi nam o przestrzeni liniowej V informacja:

$$V = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)?$$

Uwaga 1

Niech $A, A' \in M_{m \times n}(K)$ oraz niech

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – wiersze macierzy A,
- $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m$ – wiersze macierzy A'.

Jeśli założymy, że A' może być otrzymana z A za pomocą ciągu operacji elementarnych na wierszach, to wynika stąd, że

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m).$$

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m),$$

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m),$$

- dla dowolnego $1 \leq i \leq m$ oraz dowolnego niezerowego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, a \cdot \alpha_i, \ldots, \alpha_m).$$

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Weźmy $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$.

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Weźmy $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$. Istnieją $b_1, b_2, \ldots, b_m \in K$, że:

$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + b_i\alpha_i + \ldots + b_j\alpha_j + \ldots + b_m\alpha_m =$$

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Weźmy $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$. Istnieją $b_1, b_2, \ldots, b_m \in K$, że:

$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + b_i\alpha_i + \ldots + b_j\alpha_j + \ldots + b_m\alpha_m =$$
$$= b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + \ ?\alpha_i + \ldots + ?(a\alpha_i + \alpha_j) + \ldots + b_m\alpha_m.$$

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Weźmy $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$. Istnieją $b_1, b_2, \ldots, b_m \in K$, że:

$$\begin{aligned} \beta &= b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + b_i\alpha_i + \ldots + b_j\alpha_j + \ldots + b_m\alpha_m = \\ &= b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + (b_i - a \cdot b_j)\alpha_i + \ldots + b_j(a\alpha_i + \alpha_j) + \ldots + b_m\alpha_m. \end{aligned}$$

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Weźmy $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$. Istnieją $b_1, b_2, \ldots, b_m \in K$, że:

$$\begin{aligned} \beta &= b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + b_i\alpha_i + \ldots + b_j\alpha_j + \ldots + b_m\alpha_m = \\ &= b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \ldots + (b_i - a \cdot b_j)\alpha_i + \ldots + b_j(a\alpha_i + \alpha_j) + \ldots + b_m\alpha_m. \end{aligned}$$

Zatem $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$.

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Weźmy $\gamma \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$.

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Weźmy $\gamma \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$. Istnieją $c_1, c_2, \ldots, c_m \in K$, że:

$$\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_i\alpha_i + \ldots + c_j(a \cdot \alpha_i + \alpha_j) + \ldots + c_m\alpha_m =$$

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Weźmy $\gamma \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$. Istnieją $c_1, c_2, \ldots, c_m \in K$, że:

$$\begin{aligned}\gamma &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_i\alpha_i + \ldots + c_j(a \cdot \alpha_i + \alpha_j) + \ldots + c_m\alpha_m = \\ &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + (c_i + a \cdot c_j)\alpha_i + \ldots + c_j\alpha_j + \ldots + c_m\alpha_m.\end{aligned}$$

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Weźmy $\gamma \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$. Istnieją $c_1, c_2, \ldots, c_m \in K$, że:

$$\begin{aligned}\gamma &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_i\alpha_i + \ldots + c_j(a \cdot \alpha_i + \alpha_j) + \ldots + c_m\alpha_m = \\ &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + (c_i + a \cdot c_j)\alpha_i + \ldots + c_j\alpha_j + \ldots + c_m\alpha_m.\end{aligned}$$

Zatem $\gamma \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$.

Dowód. Wystarczy pokazać tezę w przypadku, gdy A' powstaje z A przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej na wierszach. Pokażemy, że:

- dla dowolnych $1 \leq i, j \leq m$ oraz dowolnego $a \in K$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m),$$

Weźmy $\gamma \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, a \cdot \alpha_i + \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$. Istnieją $c_1, c_2, \ldots, c_m \in K$, że:

$$\begin{aligned} \gamma &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_i\alpha_i + \ldots + c_j(a \cdot \alpha_i + \alpha_j) + \ldots + c_m\alpha_m = \\ &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + (c_i + a \cdot c_j)\alpha_i + \ldots + c_j\alpha_j + \ldots + c_m\alpha_m. \end{aligned}$$

Zatem $\gamma \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m)$.

Pozostałe punkty – analogicznie (tylko łatwiej).

Definicja 1.

Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni V nad ciałem K nazwiemy **liniowo zależnym**, jeśli istnieją elementy $a_1, \ldots, a_k$ ciała K, nie wszystkie równe 0, spełniające:

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

Definicja 1.

Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni V nad ciałem K nazwiemy **liniowo zależnym**, jeśli istnieją elementy $a_1, \ldots, a_k$ ciała K, nie wszystkie równe 0, spełniające:

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

Intuicja: jeśli układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny, to liczba k nie daje *dostatecznej informacji geometrycznej* o przestrzeni:

$$\operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k).$$

Definicja 1.

Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni V nad ciałem K nazwiemy **liniowo zależnym**, jeśli istnieją elementy $a_1, \ldots, a_k$ ciała K, nie wszystkie równe 0, spełniające:

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

Intuicja: jeśli układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny, to liczba k nie daje *dostatecznej informacji geometrycznej* o przestrzeni:

$$\text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k).$$

Przykład. Układ $(1,0,0), (2,0,0), (3,0,0), (4,0,0), (5,0,0)$ jest liniowo zależny w $\mathbb{R}^3$, bo:

$$1(1,0,0) + 1(2,0,0) + 1(3,0,0) + 1(4,0,0) + (-2)(5,0,0) = (0,0,0),$$

ale

$$\text{lin}((1,0,0),(2,0,0),(3,0,0),(4,0,0),(5,0,0)) = \text{lin}((1,0,0)).$$

Definicja 1.

Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni V nad ciałem K nazwiemy **liniowo zależnym**, jeśli istnieją elementy $a_1, \ldots, a_k$ ciała K, nie wszystkie równe 0, spełniające:

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

Definicja 2.

Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni V nazwiemy **liniowo niezależnym**, jeśli nie jest liniowo zależny. Innymi słowy, dla takiego układu wektorów z równości

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0,$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$ wynika, że $a_1 = \ldots = a_k = 0$.

Pusty układ wektorów uważamy za liniowo niezależny.

Przykład. Wektory

$$(1,0,2), \quad (\sqrt{2},1,2\sqrt{2}), \quad (0,2\sqrt{2},0) \in \mathbb{R}^3$$

są liniowo zależne w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, ponieważ

Przykład. Wektory

$$(1,0,2), \quad (\sqrt{2},1,2\sqrt{2}), \quad (0,2\sqrt{2},0) \in \mathbb{R}^3$$

są liniowo zależne w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, ponieważ

$$\mathbf{2}(1,0,2) + (\mathbf{-\sqrt{2}})(\sqrt{2},1,2\sqrt{2}) + \mathbf{\frac{1}{2}}(0,2\sqrt{2},0) =$$

Przykład. Wektory

$$(1, 0, 2), \quad (\sqrt{2}, 1, 2\sqrt{2}), \quad (0, 2\sqrt{2}, 0) \in \mathbb{R}^3$$

są liniowo zależne w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, ponieważ

$$\mathbf{2}(1, 0, 2) + \mathbf{(-\sqrt{2})}(\sqrt{2}, 1, 2\sqrt{2}) + \mathbf{\frac{1}{2}}(0, 2\sqrt{2}, 0) =$$

$$(2, 0, 4) + \quad (-2, -\sqrt{2}, -4) + \quad (0, \sqrt{2}, 0) =$$

Przykład. Wektory

$$(1,0,2), \quad (\sqrt{2},1,2\sqrt{2}), \quad (0,2\sqrt{2},0) \in \mathbb{R}^3$$

są liniowo zależne w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, ponieważ

$$\mathbf{2}(1,0,2) + (-\sqrt{2})(\sqrt{2},1,2\sqrt{2}) + \frac{1}{2}(0,2\sqrt{2},0) =$$

$$(2,0,4) + \quad (-2,-\sqrt{2},-4) + \quad (0,\sqrt{2},0) =$$

$$(2-2+0\ , \quad 0-\sqrt{2}+\sqrt{2}\ , \quad 4-4+0) = (0,0,0).$$

Przykład. Wektory

$$(1,0,2), \quad (\sqrt{2},1,2\sqrt{2}), \quad (0,2\sqrt{2},0) \in \mathbb{R}^3$$

są liniowo zależne w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, ponieważ

$$\mathbf{2}(1,0,2) + (-\sqrt{2})(\sqrt{2},1,2\sqrt{2}) + \frac{1}{2}(0,2\sqrt{2},0) =$$

$$(2,0,4) + \quad (-2,-\sqrt{2},-4) + \quad (0,\sqrt{2},0) =$$

$$(2-2+0\ , \quad 0-\sqrt{2}+\sqrt{2}\quad , \quad 4-4+0) = (0,0,0).$$

Jeżeli jednak rozpatrzymy $\mathbb{R}^3$ jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$, wówczas wektory te są liniowo niezależne!

Przykład. Wektory

$$(1,0,2),\quad (\sqrt{2},1,2\sqrt{2}),\quad (0,2\sqrt{2},0)\in\mathbb{R}^3$$

są liniowo zależne w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, ponieważ

$$\mathbf{2}(1,0,2)+(\mathbf{-\sqrt{2}})(\sqrt{2},1,2\sqrt{2})+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(0,2\sqrt{2},0)=$$
$$(2,0,4)+\qquad(-2,-\sqrt{2},-4)+\qquad(0,\sqrt{2},0)=$$
$$(2-2+0\ ,\qquad 0-\sqrt{2}+\sqrt{2}\quad ,\qquad 4-4+0)=(0,0,0).$$

Jeżeli jednak rozpatrzymy $\mathbb{R}^3$ jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$, wówczas wektory te są liniowo niezależne! Istotnie, dla liczb wymiernych a, b, c warunek

$$\boldsymbol{a}(1,0,2)+\boldsymbol{b}(\sqrt{2},1,2\sqrt{2})+\boldsymbol{c}(0,2\sqrt{2},0)=(0,0,0)$$

Przykład. Wektory

$$(1,0,2), \quad (\sqrt{2},1,2\sqrt{2}), \quad (0,2\sqrt{2},0) \in \mathbb{R}^3$$

są liniowo zależne w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, ponieważ

$$\mathbf{2}(1,0,2) + \mathbf{(-\sqrt{2})}(\sqrt{2},1,2\sqrt{2}) + \mathbf{\frac{1}{2}}(0,2\sqrt{2},0) =$$

$$(2,0,4) + \qquad (-2,-\sqrt{2},-4) + \qquad (0,\sqrt{2},0) =$$

$$(2-2+0\ , \qquad 0-\sqrt{2}+\sqrt{2}\quad , \qquad 4-4+0) = (0,0,0).$$

Jeżeli jednak rozpatrzymy $\mathbb{R}^3$ jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$, wówczas wektory te są liniowo niezależne! Istotnie, dla liczb wymiernych a, b, c warunek

$$\boldsymbol{a}(1,0,2) + \boldsymbol{b}(\sqrt{2},1,2\sqrt{2}) + \boldsymbol{c}(0,2\sqrt{2},0) = (0,0,0)$$

oznacza, że

$$(a+\sqrt{2}b, \quad b+2\sqrt{2}c, \quad 2a+2\sqrt{2}b) = (0,0,0),$$

a zatem $a=b=c=0$.

Intuicja z ostatniego wykładu. Wektory $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ są rozwiązaniami jednorodnego układu równań U o współczynnikach rzeczywistych, którego rozwiązanie ogólne ma 2 parametry.

Intuicja z ostatniego wykładu. Wektory $(1,2,3,4,5)$ oraz $(2,0,0,1,0)$ są rozwiązaniami jednorodnego układu równań U o współczynnikach rzeczywistych, którego rozwiązanie ogólne ma 2 parametry.

Wówczas:

- dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ kombinacje liniowe $\lambda_1(1,2,3,4,5) + \lambda_2(2,0,0,1,0)$ są również rozwiązaniami układu U,

Intuicja z ostatniego wykładu. Wektory $(1,2,3,4,5)$ oraz $(2,0,0,1,0)$ są rozwiązaniami jednorodnego układu równań U o współczynnikach rzeczywistych, którego rozwiązanie ogólne ma 2 parametry.

Wówczas:

- dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ kombinacje liniowe $\lambda_1(1,2,3,4,5) + \lambda_2(2,0,0,1,0)$ są również rozwiązaniami układu U,
- rozwiązanie ogólne układu U zależy od dwóch parametrów, więc zbiór rozwiązań U jest podprzestrzenią rozpiętą przez dwa wektory,

Intuicja z ostatniego wykładu. Wektory $(1,2,3,4,5)$ oraz $(2,0,0,1,0)$ są rozwiązaniami jednorodnego układu równań U o współczynnikach rzeczywistych, którego rozwiązanie ogólne ma 2 parametry.

Wówczas:

- dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ kombinacje liniowe $\lambda_1(1,2,3,4,5) + \lambda_2(2,0,0,1,0)$ są również rozwiązaniami układu U,
- rozwiązanie ogólne układu U zależy od dwóch parametrów, więc zbiór rozwiązań U jest podprzestrzenią rozpiętą przez dwa wektory,
- jeśli $(s_1, \ldots, s_5) \neq \lambda_1(1,2,3,4,5) + \lambda_2(2,0,0,1,0)$, dla pewnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, to układ $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5), (1,2,3,4,5), (2,0,0,1,0)$ jest liniowo niezależny.

Intuicja z ostatniego wykładu. Wektory $(1,2,3,4,5)$ oraz $(2,0,0,1,0)$ są rozwiązaniami jednorodnego układu równań U o współczynnikach rzeczywistych, którego rozwiązanie ogólne ma 2 parametry.

Wówczas:

- dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ kombinacje liniowe $\lambda_1(1,2,3,4,5) + \lambda_2(2,0,0,1,0)$ są również rozwiązaniami układu U,
- rozwiązanie ogólne układu U zależy od dwóch parametrów, więc zbiór rozwiązań U jest podprzestrzenią rozpiętą przez dwa wektory,
- jeśli $(s_1, \ldots, s_5) \neq \lambda_1(1,2,3,4,5) + \lambda_2(2,0,0,1,0)$, dla pewnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, to układ $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5), (1,2,3,4,5), (2,0,0,1,0)$ jest liniowo niezależny.
- A może gdy rozwiązanie ogólne układu jednorodnego ma n parametrów, to nie może zawierać układu więcej niż n wektorów liniowo niezależnych?

Intuicja z ostatniego wykładu. Wektory $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ są rozwiązaniami jednorodnego układu równań U o współczynnikach rzeczywistych, którego rozwiązanie ogólne ma 2 parametry.

Wówczas:

- dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ kombinacje liniowe $\lambda_1(1, 2, 3, 4, 5) + \lambda_2(2, 0, 0, 1, 0)$ są również rozwiązaniami układu U,
- rozwiązanie ogólne układu U zależy od dwóch parametrów, więc zbiór rozwiązań U jest podprzestrzenią rozpiętą przez dwa wektory,
- jeśli $(s_1, \ldots, s_5) \neq \lambda_1(1, 2, 3, 4, 5) + \lambda_2(2, 0, 0, 1, 0)$, dla pewnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, to układ $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5), (1, 2, 3, 4, 5), (2, 0, 0, 1, 0)$ jest liniowo niezależny.
- A może gdy rozwiązanie ogólne układu jednorodnego ma n parametrów, to nie może zawierać układu więcej niż n wektorów liniowo niezależnych?
- A może gdy rozwiązanie ogólne układu jednorodnego ma n parametrów, to każde n liniowo niezależnych rozwiązań rozpina przestrzeń rozwiązań?

Uwaga 2.

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Intuicja: liniowo zależny układ rozpinający nie jest *oszczędny* – można go pomniejszyć i wciąż rozpinać tę samą podprzestrzeń.

Uwaga 2.

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Intuicja: jeśli mamy układ liniowo zależny to dowolny element układu **nie musi być** kombinacją pozostałych.

Uwaga 2.

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Intuicja: jeśli mamy układ liniowo zależny to dowolny element układu **nie musi być** kombinacją pozostałych.

Przykład. Układ $\{(1,0,0),(2,0,0),(1,1,1)\}$ jest liniowo zależny w $\mathbb{R}^3$, bo

$$2(1,0,0)+(-1)(2,0,0)+0(1,1,1)=(0,0,0)$$

ale

- $(1,1,1)$ **nie jest kombinacją liniową** $(1,0,0),(2,0,0)$!
- $(1,0,0)=\frac{1}{2}(2,0,0)+0(1,1,1)$.
- $(2,0,0)=2(1,0,0)+0(1,1,1)$.

Uwaga 2.

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód:

- Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2). Weźmy $a_1, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe 0, że

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

Uwaga 2.

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód:

- Implikacja $(1) \Rightarrow (2)$. Weźmy $a_1, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe 0, że
$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$
- Weźmy takie i, że $a_i \neq 0$.

Uwaga 2.

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód:

- Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2). Weźmy $a_1, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe 0, że

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0.$$

- Weźmy takie i, że $a_i \neq 0$.
- Wtedy: $a_i\alpha_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{k} a_j\alpha_j$, czyli

$$\alpha_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{k} \frac{a_j}{a_i}\alpha_j$$

Uwaga 2.

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód:

- Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1). Istnieje takie $1 \leq i \leq k$ oraz elementy $b_j \in K$, dla $1 \leq j \leq k$, $j \neq i$, że

$$\alpha_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{k} a_j \alpha_j .$$

Uwaga 2.

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód:

- Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1). Istnieje takie $1 \leq i \leq k$ oraz elementy $b_j \in K$, dla $1 \leq j \leq k$, $j \neq i$, że
$$\alpha_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{k} a_j \alpha_j.$$
- Dostajemy kombinację liniową: $\alpha_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{k} a_j \alpha_j = 0$.

Uwaga 2.

Następujące warunki są równoważne:

1. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny.
2. Jeden z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód:

- Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1). Istnieje takie $1 \leq i \leq k$ oraz elementy $b_j \in K$, dla $1 \leq j \leq k$, $j \neq i$, że
$$\alpha_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{k} a_j \alpha_j.$$
- Dostajemy kombinację liniową: $\alpha_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{k} a_j \alpha_j = 0$.
- Współczynnik przy α_i jest równy 1, a więc jest niezerowy. Stąd układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo zależny.

Uwaga 3.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni V i niech wektor $\alpha \in V$. Następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.

Uwaga 3.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni V i niech wektor $\alpha \in V$. Następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$,

(b) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ jest liniowo zależny.

Przykład. Układ $\{(1,0,0),(2,0,0),(1,1,1)\}$ jest liniowo zależny w $\mathbb{R}^3$, bo

$$2(1,0,0) + (-1)(2,0,0) + 0(1,1,1) = (0,0,0)$$

ale

- $(1,1,1)$ nie jest kombinacją liniową $(1,0,0),(2,0,0)$, bo to układ zależny!
- $(1,0,0) = \frac{1}{2}(2,0,0) + 0(1,1,1)$, ale $\{(2,0,0),(1,1,1)\}$ jest liniowo niezależny!
- $(2,0,0) = 2(1,0,0) + 0(1,1,1)$, ale $\{(1,0,0),(1,1,1)\}$ jest liniowo niezależny!

Uwaga 4.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ będzie w postaci schodkowej oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^n$ – niezerowe wiersze macierzy A. Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jest liniowo niezależny.

Uwaga 4.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ będzie w postaci schodkowej oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^n$ – niezerowe wiersze macierzy A. Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jest liniowo niezależny.

Dowód: indukcja po r.

- Baza: układ złożony z jednego niezerowego wektora jest liniowo niezależny.

Uwaga 4.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ będzie w postaci schodkowej oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^n$ – niezerowe wiersze macierzy A. Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jest liniowo niezależny.

Dowód: indukcja po r.

- Baza: układ złożony z jednego niezerowego wektora jest liniowo niezależny.
- Jeśli dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mamy: $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$, to niech pierwszy niezerowy wyraz w wierszu α_1 stoi na k-tym miejscu.

Uwaga 4.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ będzie w postaci schodkowej oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^n$ – niezerowe wiersze macierzy A. Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jest liniowo niezależny.

Dowód: indukcja po r.

- Baza: układ złożony z jednego niezerowego wektora jest liniowo niezależny.
- Jeśli dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mamy: $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$, to niech pierwszy niezerowy wyraz w wierszu α_1 stoi na k-tym miejscu.
- Suma k–tych współrzędnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ równa jest k-tej współrzędnej wektora zerowego, czyli $\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \ldots + \lambda_r a_{rk} = 0$.

Uwaga 4.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ będzie w postaci schodkowej oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^n$ – niezerowe wiersze macierzy A. Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jest liniowo niezależny.

Dowód: indukcja po r.

- Baza: układ złożony z jednego niezerowego wektora jest liniowo niezależny.
- Jeśli dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mamy: $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$, to niech pierwszy niezerowy wyraz w wierszu α_1 stoi na k-tym miejscu.
- Suma k–tych współrzędnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ równa jest k-tej współrzędnej wektora zerowego, czyli $\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \ldots + \lambda_r a_{rk} = 0$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & \ldots & a_{3,k-1} & a_{3k} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{r,k-1} & a_{rk} & \ldots & a_{rn} \end{bmatrix}$$

Uwaga 4.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ będzie w postaci schodkowej oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^n$ – niezerowe wiersze macierzy A. Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jest liniowo niezależny.

Dowód: indukcja po r.

- Baza: układ złożony z jednego niezerowego wektora jest liniowo niezależny.
- Jeśli dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mamy: $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$, to niech pierwszy niezerowy wyraz w wierszu α_1 stoi na k-tym miejscu.
- Suma k–tych współrzędnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ równa jest k-tej współrzędnej wektora zerowego, czyli $\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \ldots + \lambda_r a_{rk} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a_{2n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a_{rn} \end{bmatrix}$$

Uwaga 4.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ będzie w postaci schodkowej oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^n$ – niezerowe wiersze macierzy A. Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jest liniowo niezależny.

Dowód: indukcja po r.

- Baza: układ złożony z jednego niezerowego wektora jest liniowo niezależny.
- Jeśli dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mamy: $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$, to niech pierwszy niezerowy wyraz w wierszu α_1 stoi na k-tym miejscu.
- Suma k–tych współrzędnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ równa jest k-tej współrzędnej wektora zerowego, czyli $\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \ldots + \lambda_r a_{rk} = 0$.
- Jednak $a_{2k} = \ldots = a_{rk} = 0$, bo A jest schodkowa. Co więcej, $a_{1k} \neq 0$. A zatem mamy $\lambda_1 a_{1k} = 0$, czyli $\lambda_1 = 0$.

Uwaga 4.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$ będzie w postaci schodkowej oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^n$ – niezerowe wiersze macierzy A. Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jest liniowo niezależny.

Dowód: indukcja po r.

- Baza: układ złożony z jednego niezerowego wektora jest liniowo niezależny.
- Jeśli dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mamy: $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$, to niech pierwszy niezerowy wyraz w wierszu α_1 stoi na k-tym miejscu.
- Suma k–tych współrzędnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ równa jest k-tej współrzędnej wektora zerowego, czyli $\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \ldots + \lambda_r a_{rk} = 0$.
- Jednak $a_{2k} = \ldots = a_{rk} = 0$, bo A jest schodkowa. Co więcej, $a_{1k} \neq 0$. A zatem mamy $\lambda_1 a_{1k} = 0$, czyli $\lambda_1 = 0$.
- A zatem $\lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$. Skoro $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ są kolejnymi wierszami macierzy schodkowej, to z założenia indukcyjnego wektory te tworzą układ liniowo niezależny, czyli mamy $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_r = 0$.

Uwaga 4.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$ będzie w postaci schodkowej oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^n$ – niezerowe wiersze macierzy A. Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jest liniowo niezależny.

Dowód: indukcja po r.

- Baza: układ złożony z jednego niezerowego wektora jest liniowo niezależny.
- Jeśli dla pewnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mamy: $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$, to niech pierwszy niezerowy wyraz w wierszu α_1 stoi na k-tym miejscu.
- Suma k–tych współrzędnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ równa jest k-tej współrzędnej wektora zerowego, czyli $\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \ldots + \lambda_r a_{rk} = 0$.
- Jednak $a_{2k} = \ldots = a_{rk} = 0$, bo A jest schodkowa. Co więcej, $a_{1k} \neq 0$. A zatem mamy $\lambda_1 a_{1k} = 0$, czyli $\lambda_1 = 0$.
- A zatem $\lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$. Skoro $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ są kolejnymi wierszami macierzy schodkowej, to z założenia indukcyjnego wektory te tworzą układ liniowo niezależny, czyli mamy $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_r = 0$.
- Pokazaliśmy, że $\lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_r\alpha_r = (0, \ldots, 0)$ implikuje $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$.

Wniosek

W przestrzeni K^n układ n wektorów $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ takich, że ϵ_i ma na i-tej współrzędnej element 1, a na pozostałych współrzędnych 0 jest liniowo niezależny.

Wniosek

W przestrzeni K^n układ n wektorów $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ takich, że ϵ_i ma na i-tej współrzędnej element 1, a na pozostałych współrzędnych 0 jest liniowo niezależny.

Przykład w K^3:

$$\epsilon_1 = (1, 0, 0), \epsilon_2 = (0, 1, 0), \epsilon_3 = (0, 0, 1).$$

Wniosek

W przestrzeni K^n układ n wektorów $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ takich, że ϵ_i ma na i-tej współrzędnej element 1, a na pozostałych współrzędnych 0 jest liniowo niezależny.

Przykład w K^3:

$$\epsilon_1 = (1, 0, 0), \epsilon_2 = (0, 1, 0), \epsilon_3 = (0, 0, 1).$$

Uwaga na boku:

$$K^n = \mathrm{lin}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n).$$

Uwaga 5.

Jednorodny układ równań U ma rozwiązanie ogólne, w którym jest r parametrów. Wówczas zbiór rozwiązań U rozpięty jest przez r wektorów liniowo niezależnych.

Uwaga 5.

Jednorodny układ równań U ma rozwiązanie ogólne, w którym jest r parametrów. Wówczas zbiór rozwiązań U rozpięty jest przez r wektorów liniowo niezależnych.

Dowód:

- Ćwiczenie: niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów w przestrzeni K^n, niech $1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq n$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi oraz niech $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ będą wektorami w K^r takimi, że na i-tej współrzędnej wektora β_j stoi k_i-tak współrzędna wektora α_j, dla każdego j. Jeśli $\beta_1, \ldots, \beta_n$ są liniowo niezależne w K^r, to $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne w K^n.

Uwaga 5.

Jednorodny układ równań U ma rozwiązanie ogólne, w którym jest r parametrów. Wówczas zbiór rozwiązań U rozpięty jest przez r wektorów liniowo niezależnych.

Dowód:

- Ćwiczenie: niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów w przestrzeni K^n, niech $1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq n$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi oraz niech $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ będą wektorami w K^r takimi, że na i-tej współrzędnej wektora β_j stoi k_i-tak współrzędna wektora α_j, dla każdego j. Jeśli $\beta_1, \ldots, \beta_n$ są liniowo niezależne w K^r, to $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne w K^n.

- Przykład $\alpha_1 = (2, 2, 0, 0, 0), \alpha_2 = (3, 0, 0, 0, 1)$, $n = 5$, $k_1 = 2$, $k_2 = 5$. Wówczas $\beta_1 = (2, 0)$, $\beta_2 = (0, 1)$.

Uwaga 5.

Jednorodny układ równań U ma rozwiązanie ogólne, w którym jest r parametrów. Wówczas zbiór rozwiązań U rozpięty jest przez r wektorów liniowo niezależnych.

Dowód:

- Ćwiczenie: niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów w przestrzeni K^n, niech $1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq n$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi oraz niech $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ będą wektorami w K^r takimi, że na i-tej współrzędnej wektora β_j stoi k_i-tak współrzędna wektora α_j, dla każdego j. Jeśli $\beta_1, \ldots, \beta_n$ są liniowo niezależne w K^r, to $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne w K^n.
- Przykład $\alpha_1 = (2, 2, 0, 0, 0), \alpha_2 = (3, 0, 0, 0, 1)$, $n = 5$, $k_1 = 2$, $k_2 = 5$. Wówczas $\beta_1 = (2, 0), \beta_2 = (0, 1)$.
- Załóżmy, że spośród zbioru zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ rozwiązanie ogólne układu równań U ma parametry $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$, gdzie $k_1 < \ldots < k_r$.

Uwaga 5.

Jednorodny układ równań U ma rozwiązanie ogólne, w którym jest r parametrów. Wówczas zbiór rozwiązań U rozpięty jest przez r wektorów liniowo niezależnych.

Dowód (cd.)

- Każdy wektor będący rozwiązaniem U zależy od wyboru elementów K na współrzędnych $k_1, \ldots, k_r$ i elementy te można wybrać dowolnie.

Uwaga 5.

Jednorodny układ równań U ma rozwiązanie ogólne, w którym jest r parametrów. Wówczas zbiór rozwiązań U rozpięty jest przez r wektorów liniowo niezależnych.

Dowód (cd.)

- Każdy wektor będący rozwiązaniem U zależy od wyboru elementów K na współrzędnych $k_1, \ldots, k_r$ i elementy te można wybrać dowolnie.

Przykład. Rozwiązanie ogólne układu U postaci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

ma dwa parametry x_3, x_4. Każde rozwiązanie jest postaci:

$$(-s-t, 0, s, t) = s(-1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1), \quad s, t \in \mathbb{R},$$

i powstaje przed odpowiedni wybór s, t na współrzędnych $3, 4$.

Uwaga 5.

Jednorodny układ równań U ma rozwiązanie ogólne, w którym jest r parametrów. Wówczas zbiór rozwiązań U rozpięty jest przez r wektorów liniowo niezależnych.

Przykład. Każde rozwiązanie układu $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$ to:

$$(-s - t, 0, s, t) = s\underbrace{(-1, 0, 1, 0)}_{\delta_1} + t\underbrace{(-1, 0, 0, 1)}_{\delta_2}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

- Każde rozwiązanie układu U jest sumą rozwiązań $\delta_i \in K^n$, gdzie $i = 1, \ldots, r$, które na współrzędnej k_i mają 1, na współrzędnych k_j mają 0, dla $j \neq i$.

Uwaga 5.

Jednorodny układ równań U ma rozwiązanie ogólne, w którym jest r parametrów. Wówczas zbiór rozwiązań U rozpięty jest przez r wektorów liniowo niezależnych.

Przykład. Każde rozwiązanie układu $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$ to:

$$(-s-t, 0, s, t) = s\underbrace{(-1, 0, 1, 0)}_{\delta_1} + t\underbrace{(-1, 0, 0, 1)}_{\delta_2}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

- Każde rozwiązanie układu U jest sumą rozwiązań $\delta_i \in K^n$, gdzie $i = 1, \ldots, r$, które na współrzędnej k_i mają 1, na współrzędnych k_j mają 0, dla $j \neq i$.
- A zatem liniowo niezależny układ wektorów $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r \in K^r$ powstaje przez wstawienie na i-tą współrzędną wektora ϵ_j współrzędnej k_i wektora δ_j.

Uwaga 5.

Jednorodny układ równań U ma rozwiązanie ogólne, w którym jest r parametrów. Wówczas zbiór rozwiązań U rozpięty jest przez r wektorów liniowo niezależnych.

Przykład. Każde rozwiązanie układu $x_1+x_2+x_3+x_4=0, x_1-x_2+x_3+x_4=0$ to:

$$(-s-t,0,s,t)=s\underbrace{(-1,0,1,0)}_{\delta_1}+t\underbrace{(-1,0,0,1)}_{\delta_2},\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

- Każde rozwiązanie układu U jest sumą rozwiązań $\delta_i \in K^n$, gdzie $i=1,\ldots,r$, które na współrzędnej k_i mają 1, na współrzędnych k_j mają 0, dla $j\neq i$.
- A zatem liniowo niezależny układ wektorów $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r\in K^r$ powstaje przez wstawienie na i-tą współrzędną wektora ϵ_j współrzędnej k_i wektora δ_j.
- Zatem układ $\delta_1,\ldots,\delta_r$ rozpina zbiór rozwiązań U i jest liniowo niezależny.

Definicja 3.

Układ $X = \{\alpha_i\}_{i \in T}$ wektorów przestrzeni V nazywamy **liniowo niezależnym**, jeśli każdy jego **skończony podukład** jest liniowo niezależny.

Definicja 3.

Układ $X = \{\alpha_i\}_{i \in T}$ wektorów przestrzeni V nazywamy **liniowo niezależnym**, jeśli każdy jego **skończony podukład** jest liniowo niezależny.

Przykłady:

- układ $\{x, x^2, x^3, \ldots, \}$ jest liniowo niezależny w $K[x]$,

Definicja 3.

Układ $X = \{\alpha_i\}_{i \in T}$ wektorów przestrzeni V nazywamy **liniowo niezależnym**, jeśli każdy jego **skończony podukład** jest liniowo niezależny.

Przykłady:

- układ $\{x, x^2, x^3, \ldots, \}$ jest liniowo niezależny w $K[x]$,
- układ ciągów $\{a_1 = (1, 0, 0, \ldots), a_2 = (0, 1, 0, \ldots), a_3 = (0, 0, 1, \ldots), \quad \ldots \quad \}$ jest liniowo niezależny w K^∞,

Definicja 3.

Układ $X = \{\alpha_i\}_{i \in T}$ wektorów przestrzeni V nazywamy **liniowo niezależnym**, jeśli każdy jego **skończony podukład** jest liniowo niezależny.

Przykłady:

- układ $\{x, x^2, x^3, \ldots,\}$ jest liniowo niezależny w $K[x]$,
- układ ciągów $\{a_1 = (1, 0, 0, \ldots), a_2 = (0, 1, 0, \ldots), a_3 = (0, 0, 1, \ldots), \quad \ldots \quad \}$ jest liniowo niezależny w K^∞,
- układ ciągów $\{(1, t, t^2, t^3, \ldots), t \in (0, 1)\}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^\infty$,

Definicja 3.

Układ $X = \{\alpha_i\}_{i \in T}$ wektorów przestrzeni V nazywamy **liniowo niezależnym**, jeśli każdy jego **skończony podukład** jest liniowo niezależny.

Przykłady:

- układ $\{x, x^2, x^3, \dots, \}$ jest liniowo niezależny w $K[x]$,
- układ ciągów $\{a_1 = (1, 0, 0, \dots), a_2 = (0, 1, 0, \dots), a_3 = (0, 0, 1, \dots), \quad \dots \quad \}$ jest liniowo niezależny w K^∞,
- układ ciągów $\{(1, t, t^2, t^3, \dots), t \in (0, 1)\}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^\infty$,
- układ $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \dots\} = \{\sqrt{p}, p \in P\}$, gdzie P - zbiór liczb pierwszych, jest liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$,

Definicja 3.

Układ $X = \{\alpha_i\}_{i \in T}$ wektorów przestrzeni V nazywamy **liniowo niezależnym**, jeśli każdy jego **skończony podukład** jest liniowo niezależny.

Przykłady:

- układ $\{x, x^2, x^3, \ldots, \}$ jest liniowo niezależny w $K[x]$,
- układ ciągów $\{a_1 = (1, 0, 0, \ldots), a_2 = (0, 1, 0, \ldots), a_3 = (0, 0, 1, \ldots), \quad \ldots \quad \}$ jest liniowo niezależny w K^∞,
- układ ciągów $\{(1, t, t^2, t^3, \ldots), t \in (0, 1)\}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^\infty$,
- układ $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \ldots\} = \{\sqrt{p}, p \in P\}$, gdzie P - zbiór liczb pierwszych, jest liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$,
- układ $\{\sin(x), \sin^2(x), \sin^3(x), \ldots\} = \{\sin(x)^n, n \in \mathbb{N}_+\}$ jest liniowo niezależny w przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Definicja 4.

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(S)$.

Definicja 4.

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \text{lin}(S)$.

Przykłady.

- Układ $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ nazywany jest bazą standardową przestrzeni K^n.

Definicja 4.

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \text{lin}(S)$.

Przykłady.

- Układ $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ nazywany jest bazą standardową przestrzeni K^n.
- Niech $V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, czyli $(x_1, x_2, x_3) \in V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = -2x_2 + x_3$.

Definicja 4.

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(S)$.

Przykłady.

- Układ $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ nazywany jest bazą standardową przestrzeni K^n.
- Niech $V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, czyli $(x_1, x_2, x_3) \in V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = -2x_2 + x_3$. Wektory w V są zatem postaci:

$$(-2x_2 + x_3, x_2, x_3) = (2x_2, x_2, 0) + (x_3, 0, x_3) = x_2(-2, 1, 0) + x_3(1, 0, 1).$$

Stąd $V = \mathrm{lin}((-2, 1, 0), (1, 0, 1))$. Wektory $(-2, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ są oczywiście liniowo niezależne, a zatem układ ten jest bazą V.

Definicja 4.

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(S)$.

Przykłady.

- Układ $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ nazywany jest bazą standardową przestrzeni K^n.
- Jeśli rozwiązanie ogólne jednorodnego układu równań ma r parametrów, to podprzestrzeń rozwiązań ma bazę złożoną z r elementów.

Definicja 4.

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(S)$.

Przykłady.

- Układ $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ nazywany jest bazą standardową przestrzeni K^n.
- Jeśli rozwiązanie ogólne jednorodnego układu równań ma r parametrów, to podprzestrzeń rozwiązań ma bazę złożoną z r elementów.
- Przykłady baz przestrzeni $M_{2\times 2}(K)$:
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Definicja 4.

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(S)$.

Przykłady.

- Układ $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ nazywany jest bazą standardową przestrzeni K^n.
- Jeśli rozwiązanie ogólne jednorodnego układu równań ma r parametrów, to podprzestrzeń rozwiązań ma bazę złożoną z r elementów.
- Przykłady baz przestrzeni $M_{2\times 2}(K)$:
$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Definicja 4.

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(S)$.

Przykłady

- Układ $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ jest bazą przestrzeni $K[x]$,

Definicja 4.

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(S)$.

Przykłady

- Układ $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ jest bazą przestrzeni $K[x]$,
- Układ $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 2)\}$ jest liniowo zależny, więc nie jest bazą przestrzeni $W = \mathrm{lin}((1, 2, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 2))$.

Definicja 4.

Układ S wektorów przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

(a) układ S jest liniowo niezależny,

(b) układ S rozpina V, to znaczy $V = \mathrm{lin}(S)$.

Przykłady

- Układ $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ jest bazą przestrzeni $K[x]$,
- Układ $\{(1,2,1), (0,1,1), (1,3,2)\}$ jest liniowo zależny, więc nie jest bazą przestrzeni $W = \mathrm{lin}((1,2,1), (0,1,1), (1,3,2))$.
- Układ $\{a_1 = (1,0,0,\dots), a_2 = (0,1,0,\dots), a_3 = (0,0,1,\dots), \quad \dots \quad \}$ **nie jest bazą** K^∞, bo wektor $(1,1,1,\dots)$ nie jest kombinacją liniową (skończonego podukładu!) wektorów $a_1, a_2, \dots$

Twierdzenie 1.

Każda przestrzeń liniowa posiada bazę. Jeśli przestrzeń liniowa V posiada bazę złożoną z n wektorów, to każda baza przestrzeni V jest złożona z n wektorów.

Dowód: część dziś, część (tw. Steinitza) – za tydzień, a część – nieobowiązkowa (istnienie bazy w przypadku, gdy przestrzeń liniowa nie jest rozpięta przez żaden skończony układ wektorów, czyli gdy nie działa *prosta forma* tw. Steinitza).

Twierdzenie 1.

Każda przestrzeń liniowa posiada bazę. Jeśli przestrzeń liniowa V posiada bazę złożoną z n wektorów, to każda baza przestrzeni V jest złożona z n wektorów.

Definicja 5.

Mówimy, że przestrzeń liniowa V jest n **wymiarowa**, jeśli V posiada bazę złożoną z n wektorów. Piszemy wówczas $\dim V = n$ i liczbę n nazywamy **wymiarem przestrzeni V**.

Twierdzenie 1.

Każda przestrzeń liniowa posiada bazę. Jeśli przestrzeń liniowa V posiada bazę złożoną z n wektorów, to każda baza przestrzeni V jest złożona z n wektorów.

Definicja 5.

Mówimy, że przestrzeń liniowa V jest n **wymiarowa**, jeśli V posiada bazę złożoną z n wektorów. Piszemy wówczas $\dim V = n$ i liczbę n nazywamy **wymiarem przestrzeni** V. Dla przestrzeni zerowej $V = \{0\}$ przyjmujemy $\dim V = 0$. Mówimy, że przestrzeń V jest **skończenie wymiarowa**, jeśli V jest n wymiarowa dla pewnego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Twierdzenie 1.

Każda przestrzeń liniowa posiada bazę. Jeśli przestrzeń liniowa V posiada bazę złożoną z n wektorów, to każda baza przestrzeni V jest złożona z n wektorów.

Definicja 5.

Mówimy, że przestrzeń liniowa V jest n **wymiarowa**, jeśli V posiada bazę złożoną z n wektorów. Piszemy wówczas $\dim V = n$ i liczbę n nazywamy **wymiarem przestrzeni** V. Dla przestrzeni zerowej $V = \{0\}$ przyjmujemy $\dim V = 0$. Mówimy, że przestrzeń V jest **skończenie wymiarowa**, jeśli V jest n wymiarowa dla pewnego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jeśli V nie jest skończenie wymiarowa, to V nazywamy **nieskończenie wymiarową** i piszemy $\dim(V) = \infty$.

Przykłady:

- $\dim(K^n) = n$, bo K^n ma bazę $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$.

Przykłady:

- $\dim(K^n) = n$, bo K^n ma bazę $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$.
- $\dim(M_{m\times n}(K)) = m \cdot n$, bo $M_{m\times n}(K)$ ma bazę złożoną z macierzy E_{ij}, które poza wyrazem w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, równym 1, mają same wyrazy zerowe.

Przykłady:

- $\dim(K^n) = n$, bo K^n ma bazę $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$.
- $\dim(M_{m \times n}(K)) = m \cdot n$, bo $M_{m \times n}(K)$ ma bazę złożoną z macierzy E_{ij}, które poza wyrazem w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, równym 1, mają same wyrazy zerowe.
- Niech $V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Wówczas $\dim(V) = 2$, bo V ma bazę postaci:
$$\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$

Przykłady:

- $\dim(K^n) = n$, bo K^n ma bazę $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$.
- $\dim(M_{m\times n}(K)) = m \cdot n$, bo $M_{m\times n}(K)$ ma bazę złożoną z macierzy E_{ij}, które poza wyrazem w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, równym 1, mają same wyrazy zerowe.
- Niech $V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Wówczas $\dim(V) = 2$, bo V ma bazę postaci:
$$\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$
- $\dim(K[x]) = \infty$, bo $K[x]$ nie ma żadnej skończonej bazy.

Przykłady:

- $\dim(K^n) = n$, bo K^n ma bazę $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$.
- $\dim(M_{m\times n}(K)) = m \cdot n$, bo $M_{m\times n}(K)$ ma bazę złożoną z macierzy E_{ij}, które poza wyrazem w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, równym 1, mają same wyrazy zerowe.
- Niech $V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Wówczas $\dim(V) = 2$, bo V ma bazę postaci:
$$\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$
- $\dim(K[x]) = \infty$, bo $K[x]$ nie ma żadnej skończonej bazy.
- $\dim(K^\infty) = \infty$, bo K^∞ nie ma żadnej skończonej bazy.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Uwaga: oczywiście twierdzenie nie działa, gdy nie mamy bazy, np. $V = \mathrm{lin}((1,0,0),(2,0,0))$ i mamy:

$$\begin{aligned}(3,0,0) =& 1(1,0,0) + 1(2,0,0) = \\ & 6(1,0,0) - 2(2,0,0).\end{aligned}$$

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód:

- Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2). Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Dowód:

- Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2). Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V.
- $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, więc każdy $\alpha \in V$ jest kombinacją wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód:

- Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2). Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V.
- $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, więc każdy $\alpha \in V$ jest kombinacją wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.
- Załóżmy, że $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = a_1'\alpha_1 + \ldots + a_k'\alpha_k$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k, a_1', \ldots, a_k' \in K$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód:

- Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2). Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V.
- $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, więc każdy $\alpha \in V$ jest kombinacją wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.
- Załóżmy, że $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_k\alpha_k$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k, a'_1, \ldots, a'_k \in K$.
- Mamy $(a_1 - a'_1)\alpha_1 + \ldots + (a_k - a'_k)\alpha_k = 0$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód:

- Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2). Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą przestrzeni V.
- $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, więc każdy $\alpha \in V$ jest kombinacją wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.
- Załóżmy, że $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_k\alpha_k$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k, a'_1, \ldots, a'_k \in K$.
- Mamy $(a_1 - a'_1)\alpha_1 + \ldots + (a_k - a'_k)\alpha_k = 0$.
- Z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wynikałoby zatem, że $a_1 - a'_1 = \ldots = a_k - a'_k = 0$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód:

- Dowodzimy (2) $\Rightarrow$ (1). Skoro każdy wektor z V jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, to układ ten rozpina V. Pozostaje pokazać, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód:

- Dowodzimy (2) $\Rightarrow$ (1). Skoro każdy wektor z V jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, to układ ten rozpina V. Pozostaje pokazać, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.
- Przypuśćmy, że $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód:

- Dowodzimy (2) $\Rightarrow$ (1). Skoro każdy wektor z V jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, to układ ten rozpina V. Pozostaje pokazać, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.
- Przypuśćmy, że $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$.
- Załóżmy, że $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_k\alpha_k$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k, a'_1, \ldots, a'_k \in K$.

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód:

- Dowodzimy (2) $\Rightarrow$ (1). Skoro każdy wektor z V jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, to układ ten rozpina V. Pozostaje pokazać, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.
- Przypuśćmy, że $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$.
- Załóżmy, że $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_k\alpha_k$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k, a'_1, \ldots, a'_k \in K$.
- Wówczas mamy: $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0\alpha_1 + \ldots + 0\alpha_k = 0$,

Twierdzenie 2.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(2) każdy wektor $\alpha \in V$ można przedstawić w sposób jednoznaczny jako kombinację liniową układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód:

- Dowodzimy (2) $\Rightarrow$ (1). Skoro każdy wektor z V jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, to układ ten rozpina V. Pozostaje pokazać, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.
- Przypuśćmy, że $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$.
- Załóżmy, że $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_k\alpha_k$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_k, a'_1, \ldots, a'_k \in K$.
- Wówczas mamy: $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0\alpha_1 + \ldots + 0\alpha_k = 0$,
- Skoro także 0 ma jednoznaczny rozkład w V, to $a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_k = 0$, co dowodzi liniowej niezależności $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Definicja 6.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą V. **Współrzędnymi wektora** $\alpha \in V$ **w bazie** $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy układ elementów $a_1, \ldots, a_k$ ciała K spełniających

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k.$$

Definicja 6.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą V. **Współrzędnymi wektora** $\alpha \in V$ **w bazie** $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy układ elementów $a_1, \ldots, a_k$ ciała K spełniających

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k.$$

Przykłady:

- Wektor $(1, 2, 1)$ ma współrzędne $1, 2, 1$ w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$,

Definicja 6.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą V. **Współrzędnymi wektora** $\alpha \in V$ **w bazie** $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy układ elementów $a_1, \ldots, a_k$ ciała K spełniających

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k.$$

Przykłady:

- Wektor $(1, 2, 1)$ ma współrzędne $1, 2, 1$ w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$,
- Wektor $(1, 2, 1)$ ma współrzędne $-1, 1, 1$ w bazie $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, bo $(1, 2, 1) = -1(1, 0, 0) + 1(1, 1, 0) + 1(1, 1, 1)$.

Twierdzenie 3 (Steinitz, 1910).

Jeśli układ wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ leżących w przestrzeni $V = \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$ jest liniowo niezależny, to:

(a) $k \leq m$,

(b) z układu $\beta_1, \dots, \beta_m$ można wybrać taki podukład $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_{m-k}}$, że:

$$\text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m) = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_{m-k}}).$$

Dowód na kolejnym wykładzie.