Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 4, 10.11.2020 r.

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Zadanie. Ciągi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ są rozwiązaniami pewnego jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych. Opisz wszystkie rozwiązania zakładając, że macierz tego układu po sprowadzeniu do postaci schodkowej ma trzy schodki.

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Zadanie. Ciągi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ są rozwiązaniami pewnego jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych. Opisz wszystkie rozwiązania zakładając, że macierz tego układu po sprowadzeniu do postaci schodkowej ma trzy schodki.

Trzy pytania

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Zadanie. Ciągi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ są rozwiązaniami pewnego jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych. Opisz wszystkie rozwiązania zakładając, że macierz tego układu po sprowadzeniu do postaci schodkowej ma trzy schodki.

Trzy pytania

1. Które jednorodne równania liniowe mają wśród rozwiązań ciągi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$? Które ich **układy** zadają macierz o 3 schodkach?

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Zadanie. Ciągi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ są rozwiązaniami pewnego jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych. Opisz wszystkie rozwiązania zakładając, że macierz tego układu po sprowadzeniu do postaci schodkowej ma trzy schodki.

Trzy pytania

1. Które jednorodne równania liniowe mają wśród rozwiązań ciągi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$? Które ich **układy** zadają macierz o 3 schodkach?
2. Jakie rozwiązania musi mieć każdy znaleziony **układ**, poza tymi dwoma?

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Zadanie. Ciągi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ są rozwiązaniami pewnego jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych. Opisz wszystkie rozwiązania zakładając, że macierz tego układu po sprowadzeniu do postaci schodkowej ma trzy schodki.

Trzy pytania

1. Które jednorodne równania liniowe mają wśród rozwiązań ciągi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$? Które ich **układy** zadają macierz o 3 schodkach?
2. Jakie rozwiązania musi mieć każdy znaleziony **układ**, poza tymi dwoma?
3. A jakich rozwiązań nie może mieć żaden znaleziony wyżej **układ**?

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 1. Które jednorodne równania liniowe mają wśród rozwiązań ciągi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$? Które ich układy zadają macierz o 3 schodkach?

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 1. Które jednorodne równania liniowe mają wśród rozwiązań ciągi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$? Które ich układy zadają macierz o 3 schodkach?

Są to równania postaci $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 0$ takie, że:

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 1. Które jednorodne równania liniowe mają wśród rozwiązań ciągi $(1,2,3,4,5)$ oraz $(2,0,0,1,0)$? Które ich układy zadają macierz o 3 schodkach?

Są to równania postaci $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 0$ takie, że:

$$\begin{cases} 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 &= 0 \\ 2a_1 + 0a_2 + 0a_3 + 1a_4 + 0a_5 &= 0 \end{cases}. \qquad (\dagger)$$

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 1. Które jednorodne równania liniowe mają wśród rozwiązań ciągi $(1,2,3,4,5)$ oraz $(2,0,0,1,0)$? Które ich układy zadają macierz o 3 schodkach?

Są to równania postaci $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 0$ takie, że:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 & = 0 \\ 2a_1 + a_4 & = 0 \end{cases}. \qquad (\dagger)$$

Wniosek: zbiór **wszystkich równań liniowych jednorodnych**, które mają (nie tylko) rozwiązania $(1,2,3,4,5)$ oraz $(2,0,0,1,0)$ ma *strukturę* zbioru rozwiązań układu równań, czyli opisany jest przez piątki $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ spełniające $(\dagger)$.

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 1. Które jednorodne równania liniowe mają wśród rozwiązań ciągi $(1,2,3,4,5)$ oraz $(2,0,0,1,0)$? Które ich układy zadają macierz o 3 schodkach?

Są to równania postaci $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 0$ takie, że:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 & = 0 \\ 2a_1 + a_4 & = 0 \end{cases}. \qquad (\dagger)$$

Wystarczy wziąć 3 rozwiązania postaci $(*,*,*,*,*)$, $(0,*,*,*,*)$, $(0,0,*,*,*)$ i dostajemy układ 3 równań tworzący macierz o 3 schodkach, będącą macierzą układu, którego rozwiązaniami są między innymi $(1,2,3,4,5)$ oraz $(2,0,0,1,0)$, np.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 1. Które jednorodne równania liniowe mają wśród rozwiązań ciągi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$? Które ich układy zadają macierz o 3 schodkach?

Są to równania postaci $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 0$ takie, że:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 & = 0 \\ 2a_1 + a_4 & = 0 \end{cases}. \qquad (\dagger)$$

Wystarczy wziąć 3 rozwiązania postaci $(*, *, *, *, *)$, $(0, *, *, *, *)$, $(0, 0, *, *, *)$ i dostajemy układ 3 równań tworzący macierz o 3 schodkach, będącą macierzą układu, którego rozwiązaniami są między innymi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$.

Pokażemy: **każdy wybrany w ten sposób układ ma ten sam zbiór rozwiązań!**

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 1. Które jednorodne równania liniowe mają wśród rozwiązań ciągi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$? Które ich układy zadają macierz o 3 schodkach?

Są to równania postaci $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 0$ takie, że:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 & = 0 \\ 2a_1 + a_4 & = 0 \end{cases}. \quad (\dagger)$$

Wystarczy wziąć 3 rozwiązania postaci $(*, *, *, *, *)$, $(0, *, *, *, *)$, $(0, 0, *, *, *)$ i dostajemy układ 3 równań tworzący macierz o 3 schodkach, będącą macierzą układu, którego rozwiązaniami są między innymi $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$.

Pokażemy: **każdy wybrany w ten sposób układ ma ten sam zbiór rozwiązań!** Oczywiście, są i inne układy o współczynnikach spełniających $(\dagger)$, które mają ten sam zbiór rozwiązań, ale są i takie, które mają *więcej* rozwiązań, np. każdy układ złożony z pojedynczego równania jednorodnego spełniającego warunki z $(\dagger)$.

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 2. Jakie rozwiązania musi mieć każdy znaleziony wcześniej układ jednorodny, poza rozwiązaniami $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$?

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 2. Jakie rozwiązania musi mieć każdy znaleziony wcześniej układ jednorodny, poza rozwiązaniami $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$?

Do zbioru rozwiązań **dowolnego** układu równań jednorodnych, który ma rozwiązania $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ należą też:

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 2. Jakie rozwiązania musi mieć każdy znaleziony wcześniej układ jednorodny, poza rozwiązaniami $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$?

Do zbioru rozwiązań **dowolnego** układu równań jednorodnych, który ma rozwiązania $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ należą też:

(a) każda *wielokrotność* $\lambda_1 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) = (\lambda_1 \cdot 1, \lambda_1 \cdot 2, \lambda_1 \cdot 3, \lambda_1 \cdot 4, \lambda_1 \cdot 5)$,

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 2. Jakie rozwiązania musi mieć każdy znaleziony wcześniej układ jednorodny, poza rozwiązaniami $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$?

Do zbioru rozwiązań **dowolnego** układu równań jednorodnych, który ma rozwiązania $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ należą też:

(a) każda *wielokrotność* $\lambda_1 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) = (\lambda_1 \cdot 1, \lambda_1 \cdot 2, \lambda_1 \cdot 3, \lambda_1 \cdot 4, \lambda_1 \cdot 5)$,

(b) każda *wielokrotność* $\lambda_2 \cdot (2, 0, 0, 1, 0) = (\lambda_2 \cdot 2, \lambda_2 \cdot 0, \lambda_2 \cdot 0, \lambda_2 \cdot 1, \lambda_2 \cdot 0)$,

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 2. Jakie rozwiązania musi mieć każdy znaleziony wcześniej układ jednorodny, poza rozwiązaniami $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$?

Do zbioru rozwiązań **dowolnego** układu równań jednorodnych, który ma rozwiązania $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ należą też:

(a) każda *wielokrotność* $\lambda_1 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) = (\lambda_1 \cdot 1, \lambda_1 \cdot 2, \lambda_1 \cdot 3, \lambda_1 \cdot 4, \lambda_1 \cdot 5)$,

(b) każda *wielokrotność* $\lambda_2 \cdot (2, 0, 0, 1, 0) = (\lambda_2 \cdot 2, \lambda_2 \cdot 0, \lambda_2 \cdot 0, \lambda_2 \cdot 1, \lambda_2 \cdot 0)$,

(c) kazda *suma* $\lambda_1 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) + \lambda_2 \cdot (2, 0, 0, 1, 0)$ tych *wielokrotności*, czyli

$$(\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2, \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 0, \lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 0, \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 \cdot 1, \lambda_1 \cdot 5 + \lambda_2 \cdot 0).$$

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 2. Jakie rozwiązania musi mieć każdy znaleziony wcześniej układ jednorodny, poza rozwiązaniami $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$?

Do zbioru rozwiązań **dowolnego** układu równań jednorodnych, który ma rozwiązania $(1, 2, 3, 4, 5)$ oraz $(2, 0, 0, 1, 0)$ należą też:

(a) każda *wielokrotność* $\lambda_1 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) = (\lambda_1 \cdot 1, \lambda_1 \cdot 2, \lambda_1 \cdot 3, \lambda_1 \cdot 4, \lambda_1 \cdot 5)$,

(b) każda *wielokrotność* $\lambda_2 \cdot (2, 0, 0, 1, 0) = (\lambda_2 \cdot 2, \lambda_2 \cdot 0, \lambda_2 \cdot 0, \lambda_2 \cdot 1, \lambda_2 \cdot 0)$,

(c) kazda *suma* $\lambda_1 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) + \lambda_2 \cdot (2, 0, 0, 1, 0)$ tych *wielokrotności*, czyli

$$(\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2, \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 0, \lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 0, \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 \cdot 1, \lambda_1 \cdot 5 + \lambda_2 \cdot 0).$$

Uwaga: poza $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, nigdy nie mamy $\lambda_1 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) = \lambda_2 \cdot (2, 0, 0, 1, 0)$.

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 3. A jakich rozwiązań nie może mieć żaden wyznaczony wcześniej układ?

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 3. A jakich rozwiązań nie może mieć żaden wyznaczony wcześniej układ?

Macierz każdego rozważanego układu ma po sprowadzeniu do postaci schodkowej 3 schodki, a zatem rozwiązanie *zależy* od dwóch parametrów.

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 3. A jakich rozwiązań nie może mieć żaden wyznaczony wcześniej układ?

Macierz każdego rozważanego układu ma po sprowadzeniu do postaci schodkowej 3 schodki, a zatem rozwiązanie *zależy* od dwóch parametrów.

Czy dowolny taki układ może mieć rozwiązania poza zbiorem:

$$\{\lambda_1 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) + \lambda_2 \cdot (2, 0, 0, 1, 0)\ ,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}?$$

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 3. A jakich rozwiązań nie może mieć żaden wyznaczony wcześniej układ?

Macierz każdego rozważanego układu ma po sprowadzeniu do postaci schodkowej 3 schodki, a zatem rozwiązanie *zależy* od dwóch parametrów.

Czy dowolny taki układ może mieć rozwiązania poza zbiorem:

$$\{\lambda_1 \cdot (1,2,3,4,5) + \lambda_2 \cdot (2,0,0,1,0)\,,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}?$$

Gdyby takie rozwiązanie $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ istniało, to także każda wielokrotność postaci $\lambda_3(s_1, s_2, \ldots, s_5)$ byłaby rozwiązaniem. A zatem także:

$$\lambda_1 \cdot (1,2,3,4,5) + \lambda_2 \cdot (2,0,0,1,0) + \lambda_3(s_1, s_2, \ldots, s_5).$$

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Pytanie 3. A jakich rozwiązań nie może mieć żaden wyznaczony wcześniej układ?

Macierz każdego rozważanego układu ma po sprowadzeniu do postaci schodkowej 3 schodki, a zatem rozwiązanie *zależy* od dwóch parametrów.

Czy dowolny taki układ może mieć rozwiązania poza zbiorem:

$$\{\lambda_1 \cdot (1,2,3,4,5) + \lambda_2 \cdot (2,0,0,1,0)\,,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}?$$

Gdyby takie rozwiązanie $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ istniało, to także każda wielokrotność postaci $\lambda_3(s_1, s_2, \ldots, s_5)$ byłaby rozwiązaniem. A zatem także:

$$\lambda_1 \cdot (1,2,3,4,5) + \lambda_2 \cdot (2,0,0,1,0) + \lambda_3(s_1, s_2, \ldots, s_5).$$

Kluczowe – tak być nie może, bo teraz rozwiązanie zależy od 3 parametrów.
Celem dalszej części jest dokładne zrozumienie zdania powyżej.

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Niezbyt formalne wnioski:

- zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych jest zamknięty na branie *sumy* i *wielokrotności*,

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Niezbyt formalne wnioski:

- zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych jest zamknięty na branie *sumy* i *wielokrotności*,
- zbiór równań jednorodnych o (jakimś ustalonym) wspólnym podzbiorze zbiorów rozwiązań też jest zamknięty na branie *sumy* i *wielokrotności*,

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Niezbyt formalne wnioski:

- zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych jest zamknięty na branie *sumy* i *wielokrotności*,
- zbiór równań jednorodnych o (jakimś ustalonym) wspólnym podzbiorze zbiorów rozwiązań też jest zamknięty na branie *sumy* i *wielokrotności*,
- gdy zbiór rozwiązań ma 1 parametr: rozwiązania zachowują się jak wektory o wspólnym początku, których końce leżą na jednej prostej,

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Niezbyt formalne wnioski:

- zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych jest zamknięty na branie *sumy* i *wielokrotności*,
- zbiór równań jednorodnych o (jakimś ustalonym) wspólnym podzbiorze zbiorów rozwiązań też jest zamknięty na branie *sumy* i *wielokrotności*,
- gdy zbiór rozwiązań ma 1 parametr: rozwiązania zachowują się jak wektory o wspólnym początku, których końce leżą na jednej prostej,
- gdy zbiór rozwiązań ma 2 parametry, rozwiązania zachowują się jak wektory o wspólnym początku, których końce leżą na jednej płaszczyźnie,

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Niezbyt formalne wnioski:

- zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych jest zamknięty na branie *sumy* i *wielokrotności*,
- zbiór równań jednorodnych o (jakimś ustalonym) wspólnym podzbiorze zbiorów rozwiązań też jest zamknięty na branie *sumy* i *wielokrotności*,
- gdy zbiór rozwiązań ma 1 parametr: rozwiązania zachowują się jak wektory o wspólnym początku, których końce leżą na jednej prostej,
- gdy zbiór rozwiązań ma 2 parametry, rozwiązania zachowują się jak wektory o wspólnym początku, których końce leżą na jednej płaszczyźnie,
- układy równań o wspólnym podzbiorze zbiorów rozwiązań mają *strukturę geometryczną*!

Geometryczna *twarz* układów równań i ich rozwiązań

Niezbyt formalne wnioski:

- zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych jest zamknięty na branie *sumy* i *wielokrotności*,
- zbiór równań jednorodnych o (jakimś ustalonym) wspólnym podzbiorze zbiorów rozwiązań też jest zamknięty na branie *sumy* i *wielokrotności*,
- gdy zbiór rozwiązań ma 1 parametr: rozwiązania zachowują się jak wektory o wspólnym początku, których końce leżą na jednej prostej,
- gdy zbiór rozwiązań ma 2 parametry, rozwiązania zachowują się jak wektory o wspólnym początku, których końce leżą na jednej płaszczyźnie,
- układy równań o wspólnym podzbiorze zbiorów rozwiązań mają *strukturę geometryczną*!

Idea: rozmaite struktury matematyczne mają analogiczną *geometryczną twarz*.

Definicja 1.

Przestrzenią liniową nad ciałem $(K, +, \cdot, 0, 1)$ nazywamy zbiór V:

- odwzorowaniem: $\oplus : V \times V \longrightarrow V$, zwanym dodawaniem wektorów,
- odwzorowaniem: $\otimes : K \times V \longrightarrow V$, zwanym mnożeniem wektora przez skalar,
- z wyróżnionym elementem Θ w V zwanym wektorem zerowym,

przy czym spełnione są następujące aksjomaty przestrzeni liniowej:

$\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in V}$	$\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$	łączność $\oplus$
$\forall_{\alpha,\beta\in V}$	$\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$	przemienność $\oplus$
$\forall_{\alpha\in V}$	$\alpha \oplus \Theta = \alpha$	Θ jest elem. neutralnym $\oplus$
$\forall_{\alpha\in V}\exists_{\gamma\in V}$	$\alpha \oplus \gamma = \Theta$	istnienie wekt. przeciwnego
$\forall_{\alpha\in V}$	$1 \otimes \alpha = \alpha$	mnożenie wektora przez 1
$\forall_{\alpha\in V}\forall_{a,b\in K}$	$(a \cdot b) \otimes \alpha = a \otimes (b \otimes \alpha)$	zgodność $\cdot$ z mnożeniem $\otimes$
$\forall_{\alpha\in V}, \forall_{a,b\in V}$	$(a + b) \otimes \alpha = (a \otimes \alpha) \oplus (b \otimes \alpha)$	rozdzielność $\otimes$ względem $+$
$\forall_{\alpha,\beta\in V}, \forall_{a\in K}$	$a \otimes (\alpha \oplus \beta) = (a \otimes \alpha) \oplus (a \otimes \beta)$	rozdzielność $\otimes$ względem $\oplus$

Przykład 1.

Niech K^n oznacza zbiór wszystkich ciągów n-elementowych o wyrazach z ciała K, to znaczy:

$$K^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, x_i \in K, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Wyraz x_i w ciągu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy i-tą współrzędną.

Działania w K^n określone są w sposób naturalny wzorami:

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$,
- $a \otimes (x_1, x_2, \dots, x_n) = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n)$.

Wektorem zerowym jest ciąg $(0, 0, \dots, 0)$.

Przykład 2.

Niech $M_{m\times n}(K)$ oznacza zbiór wszystkich macierzy $m \times n$ o wyrazach z ciała K.

- Sumą macierzy $[a_{ij}]$ oraz $[b_{ij}]$ nazywamy macierz $[c_{ij}]$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$:

$$\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & b_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} + b_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}.$$

- Iloczynem macierzy $[d_{ij}]$ przez skalar $c \in K$ nazywamy macierz $[c \cdot d_{ij}]$:

$$c \cdot \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & d_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c \cdot d_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Wektorem zerowym w $M_{m\times n}(K)$ jest **macierz zerowa** rozmiarów $m \times n$.

Przykład 3.

Oznaczmy przez K^∞ zbiór wszystkich ciągów o wyrazach z ciała K, to znaczy:

$$K^\infty = \{(x_i) \mid x_i \in K, i = 1, 2, \ldots\}.$$

Ciągi $x = (x_i)$ oraz $y = (y_i)$ dodajemy i mnożymy przez skalary według zasady:

- $(x \oplus y)_i = x_i + y_i$,
- $(a \otimes x)_i = a \cdot x_i$.

Wektorem zerowym jest ciąg, którego wszystkie wyrazy są zerem w ciele K.

Przykład 4.

Niech $K[x]$ będzie zbiorem wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach w ciele K, czyli

$$K[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid n = \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0, a_1, \ldots, a_n \in K\}.$$

Dodawanie wielomianów i mnożenie wielomianów przez skalar są zdefiniowane w następujący sposób:

- suma wielomianów $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ oraz $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ jest wielomianem, w którym przy wyrazie x^i ma sumę współczynników $a_i + b_i$,
- iloczyn skalara $c \in K$ przez wielomian $c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ jest wielomianem, w którym przy wyrazie x^i jest współczynnik $c \cdot c_i$.

Wektorem zerowym w $K[x]$ jest wielomian zerowy.

Przykład 5.

Niech $F(X, K)$ będzie zbiorem wszystkich funkcji z danego niepustego zbioru X do ciała K. Dla $f, g \in F(X, K)$ i dla $a \in K$ funkcje $f \oplus g$ oraz $a \otimes f$ określone są warunkami:

- $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$,
- $(a \otimes f)(x) = af(x)$.

Element zerowy to funkcja stale równa 0.

Przykład 6.

Jeśli K jest ciałem i L jest podciałem ciała K, to K ma strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem L. Elementy ciała K można traktować jako wektory, zaś L jako skalary.

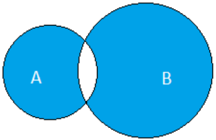
Przykłady:

- przestrzeń $\mathbb{C}$ nad ciałem $\mathbb{R}$,
- przestrzeń $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nad ciałem $\mathbb{Q}$,
- przestrzeń $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$ (bardzo skomplikowana!),
- ciało o p^n elementach jest p. liniową nad ciałem $\mathbb{Z}_p$, gdzie p – pierwsza.

Przykład 7.

Niech X będzie zbiorem niepustym, zaś $P(X)$ – zbiorem podzbiorów zbioru X. Na zbiorze $P(X)$ określamy strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{Z}_2$.

Operacja $\triangle$ dodawania wektorów określona jest w sposób następujący dla dowolnych $A, B \in P(X)$ jako ich tzw. różnica symetryczna $A \triangle B = A \cup B \setminus (A \cap B)$.



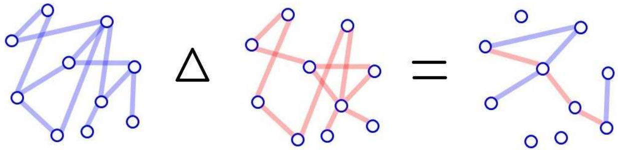
Co więcej, dla każdego $A \in P(X)$ definiujemy mnożenie wektora A przez skalar (jeden z dwóch w $\mathbb{Z}_2$):

- $0 \otimes A = \emptyset$ – zbiór pusty
- $1 \otimes A = A$.

Przykład 8.

Niech X będzie skończonym zbiorem niepustym, E zaś niech będzie podzbiorem zbioru par nieuporządkowanych zbioru X. Parę $G = (X, E)$ nazwiemy **grafem niezorientowanym** o zbiorze wierzchołków X i zbiorze krawędzi E. Jeśli $\{a, b\} \in E$ to mówimy, że między wierzchołkami a, b grafu G jest krawędź.

Określamy przestrzeń liniową $P(E)$ nad ciałem $\mathbb{Z}_2$, zwaną **przestrzenią krawędziową** grafu G, jak w poprzednim przykładzie.



Definicja 2.

Niepusty podzbiór $W \subset V$ nazywamy **podprzestrzenią przestrzeni liniowej** V jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in W$ oraz każdego $a \in K$ zachodzi:

- $\alpha + \beta \in W$,
- $a \cdot \alpha \in W$.

W każdej przestrzeni liniowej V podzbiór $\{0\}$, złożony tylko z wektora zerowego, jest jej podprzestrzenią. Nazywamy ją **podprzestrzenią zerową.**

Uwaga: wektor zerowy należy do każdej podprzestrzeni!

Przykład 9.

Rozpatrzmy jednorodny układ równań liniowych o współczynnikach w ciele K:

$$U: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Zbiór wszystkich rozwiązań układu U jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej K^n.

Uwaga: zbiór rozwiązań układu niejednorodnego nie jest podprzestrzenią!

Przykład 10.

W przestrzeni ciągów $\mathbb{R}^\infty$ wskazać można bardzo wiele podprzestrzeni, np.:

- ciągi mające skończenie wiele niezerowych wyrazów,
- ciągi ograniczone,
- ciągi zbieżne,
- ciągi $(x_i)_{i=1}^\infty$ spełniające $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$.
- ciągi $(x_i)_{i=1}^\infty$ spełniające określone rekurencje liniowe, np. $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.

Przykład 11.

Przykłady podprzestrzeni w przestrzeni funkcji $F(K, K)$:

- funkcje parzyste, spełniające równanie $f(x) = f(-x)$, dla $x \in K$,
- funkcje nieparzyste, spełniające równanie $f(x) = -f(-x)$, dla $x \in K$,
- funkcje będące rozwiązaniami równania Cauchy'ego, tzn. dla każdych $x, y \in K$:
$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$
- nad $\mathbb{R}$ (i nie tylko): funkcje ograniczone, monotoniczne itd.

Definicja 3.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. **Kombinacją liniową** układu wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ o współczynnikach $a_1, \ldots, a_k \in K$ nazywamy wektor:

$$\beta = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = \sum_{i=1}^{k} a_i\alpha_i.$$

Przykłady.

- W przestrzeni $V = \mathbb{R}^4$ kombinacją liniową wektorów $(2, 1, -3, 4), (0, 2, 5, 1), (7, 4, 3, 2)$ ze współczynnikami $2, -1, 1$ jest wektor

$$2(2, 1, -3, 4) - 1(0, 2, 5, 1) + 1(7, 4, 5, 2) = (11, 4, -8, 9).$$

Przykłady.

- W przestrzeni $V = \mathbb{R}^4$ kombinacją liniową wektorów $(2,1,-3,4),(0,2,5,1),(7,4,3,2)$ ze współczynnikami $2,-1,1$ jest wektor

$$2(2,1,-3,4) - 1(0,2,5,1) + 1(7,4,5,2) = (11,4,-8,9).$$

- W przestrzeni funkcji $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ kombinacją liniową wektorów $\sin(x)$ oraz $\cos(x)$ o współczynnikach $\frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ jest funkcja

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}).$$

Przykłady.

- W przestrzeni $V = \mathbb{R}^4$ kombinacją liniową wektorów $(2,1,-3,4), (0,2,5,1), (7,4,3,2)$ ze współczynnikami $2, -1, 1$ jest wektor

$$2(2,1,-3,4) - 1(0,2,5,1) + 1(7,4,5,2) = (11,4,-8,9).$$

- W przestrzeni funkcji $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ kombinacją liniową wektorów $\sin(x)$ oraz $\cos(x)$ o współczynnikach $\frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ jest funkcja

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}).$$

- Wektor $(0,3,1) \in \mathbb{R}^3$ nie jest kombinacją liniową wektorów $(0,1,1), (-1,0,1)$, bo założenie, że

$$(0,3,1) = a(0,1,1) + b(-1,0,1)$$

  prowadzi do układu równań $0 = -b$, $3 = a$, $1 = a + b$, który nie ma rozwiązań.

Uwaga 1.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami przestrzeni liniowej V nad K. Jeśli wektory β, γ są kombinacjami liniowymi wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, to wektory $\beta + \gamma$ oraz $a\beta$, dla każdego $a \in K$, również są kombinacjami liniowymi wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Uwaga 1.

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami przestrzeni liniowej V nad K. Jeśli wektory β, γ są kombinacjami liniowymi wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, to wektory $\beta + \gamma$ oraz $a\beta$, dla każdego $a \in K$, również są kombinacjami liniowymi wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Definicja 4.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$. Wówczas przez

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

oznaczamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Jest to podprzestrzeń V nazywana **przestrzenią rozpiętą na układzie** $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Mówimy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ **rozpina przestrzeń** V, jeśli $V = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, to znaczy każdy wektor z V jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Przykład 12: zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych postaci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

Przykład 12: zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych postaci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

to podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^4$ złożona z czwórek postaci:

$$(0, -s - t, s, t), \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R},$$

Przykład 12: zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych postaci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

to podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^4$ złożona z czwórek postaci:

$$(0, -s - t, s, t), \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R},$$

czyli podprzestrzeń postaci:

$$\mathrm{lin}((0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)),$$

Przykład 12: zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych postaci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

to podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^4$ złożona z czwórek postaci:

$$(0, -s - t, s, t), \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R},$$

czyli podprzestrzeń postaci:

$$\text{lin}((0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)),$$

bo dla dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$ mamy:

$$(0, -s - t, s, t) = (0, -s, s, 0) + (0, -t, 0, t) = s(0, -1, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1).$$

Uwaga 2.

Podprzestrzeń $\operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest najmniejszą podprzestrzenią V (względem inkluzji) zawierającą wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Uwaga 2.

Podprzestrzeń $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest najmniejszą podprzestrzenią V (względem inkluzji) zawierającą wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Dowód.

Niech W będzie dowolną podprzestrzenią zawierającą wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.
Z definicji podprzestrzeni W zawiera każdą kombinację liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, czyli każdy wektor z $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Stąd $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subseteq W$. $\square$

Definicja 5.

Niech $A \in M_{m\times n}(K)$ będzie macierzą o wyrazach a_{ij}, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Wówczas:

- przez podprzestrzeń wierszową $W(A)$ rozumieć będziemy podprzestrzeń K^n rozpiętą przez wektory:

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{nm}).$$

- przez podprzestrzeń kolumnową $K(A)$ rozumieć będziemy podprzestrzeń K^m rozpiętą przez wektory:

$$(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), (a_{12}.a_{22}, \ldots, a_{m2}), \ldots, (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}).$$

Uwaga 3.

Niech $A, A' \in M_{m\times n}(K)$ oraz niech

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – wiersze macierzy A,
- $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m$ – wiersze macierzy A'.

Jeśli założymy, że A' może być otrzymana z A za pomocą ciągu operacji elementarnych na wierszach, to wynika stąd, że

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \mathrm{lin}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m).$$

Dowód.

Indukcja. Dla A' otrzymanej z A przez pojedynczą operację elementarną na wierszach pokazuje się inkluzje $\subseteq$ oraz $\supseteq$. $\square$

Uwaga do definicji 4.

Niech $X = \{\alpha_t\}_{t \in T}$ będzie dowolnym układem wektorów przestrzeni V. Wówczas przez $\mathrm{lin}(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych skończonych podukładów układu X. To znaczy:

$$\beta \in \mathrm{lin}(X) \iff \beta = \sum_{i=1}^{k} a_i \alpha_{t_i}, \text{ dla pewnych } a_1, \ldots, a_k \in K, \alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_k} \in X.$$

Jeśli $V = \mathrm{lin}(X)$ to mówimy, że układ X rozpina V i przestrzeń V jest rozpięta na X. Dla układu pustego $X = \emptyset$ przyjmujemy $\mathrm{lin}(X) = \{0\}$.

Uwaga do definicji 4.

Niech $X = \{\alpha_t\}_{t \in T}$ będzie dowolnym układem wektorów przestrzeni V. Wówczas przez $\operatorname{lin}(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych skończonych podukładów układu X. To znaczy:

$$\beta \in \operatorname{lin}(X) \iff \beta = \sum_{i=1}^{k} a_i \alpha_{t_i}, \text{ dla pewnych } a_1, \ldots, a_k \in K, \alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_k} \in X.$$

Jeśli $V = \operatorname{lin}(X)$ to mówimy, że układ X rozpina V i przestrzeń V jest rozpięta na X. Dla układu pustego $X = \emptyset$ przyjmujemy $\operatorname{lin}(X) = \{0\}$.

Przykłady:

- $V = \operatorname{lin}(V)$,
- $K[x] = \operatorname{lin}(1, x, x^2, x^3, \ldots)$,
- problem: „wypisać” najmniejszy taki zbiór X, by $\mathbb{R} = \operatorname{lin}(X)$, gdzie $\mathbb{R}$ – przestrzeń nad $\mathbb{Q}$.

Za tydzień:

- minimalne układy rozpinające,
- liniowa niezależność wektorów,
- baza, wymiar przestrzeni liniowej.