Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 13, 26.01.2021 r.

Przypomnienie. Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K oraz niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą współczynników układu U. Następujące warunki są równoważne

- układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie,

Przypomnienie. Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K oraz niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą współczynników układu U. Następujące warunki są równoważne

- układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- $r(A) = n$,

Przypomnienie. Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K oraz niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą współczynników układu U. Następujące warunki są równoważne

- układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- $r(A) = n$,
- A jest macierzą izomorfizmu,

Przypomnienie. Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K oraz niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą współczynników układu U. Następujące warunki są równoważne

- układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- $r(A) = n$,
- A jest macierzą izomorfizmu,
- macierz A jest odwracalna,

Przypomnienie. Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K oraz niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą współczynników układu U. Następujące warunki są równoważne

- układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- $r(A) = n$,
- A jest macierzą izomorfizmu,
- macierz A jest odwracalna,
- $\det A \neq 0$.

Przypomnienie. Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K oraz niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą współczynników układu U. Następujące warunki są równoważne

- układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- $r(A) = n$,
- A jest macierzą izomorfizmu,
- macierz A jest odwracalna,
- $\det A \neq 0$.

Kilka pytań na dziś (a raczej na przyszłość):

Przypomnienie. Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K oraz niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą współczynników układu U. Następujące warunki są równoważne

- układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- $r(A) = n$,
- A jest macierzą izomorfizmu,
- macierz A jest odwracalna,
- $\det A \neq 0$.

Kilka pytań na dziś (a raczej na przyszłość):

- Jak wygląda wzór na wyznacznik?

Przypomnienie. Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K oraz niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą współczynników układu U. Następujące warunki są równoważne

- układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- $r(A) = n$,
- A jest macierzą izomorfizmu,
- macierz A jest odwracalna,
- $\det A \neq 0$.

Kilka pytań na dziś (a raczej na przyszłość):

- Jak wygląda wzór na wyznacznik?
- Jak wykorzystywać *ciągłość* wyznacznika, gdy $K = \mathbb{R}$?

Przypomnienie. Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K oraz niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą współczynników układu U. Następujące warunki są równoważne

- układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- $r(A) = n$,
- A jest macierzą izomorfizmu,
- macierz A jest odwracalna,
- $\det A \neq 0$.

Kilka pytań na dziś (a raczej na przyszłość):

- Jak wygląda wzór na wyznacznik?
- Jak wykorzystywać *ciągłość* wyznacznika, gdy $K = \mathbb{R}$?
- Jak interpretować znak wyznacznika, gdy $K = \mathbb{R}$?

Przypomnienie. Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K oraz niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą współczynników układu U. Następujące warunki są równoważne

- układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- $r(A) = n$,
- A jest macierzą izomorfizmu,
- macierz A jest odwracalna,
- $\det A \neq 0$.

Kilka pytań na dziś (a raczej na przyszłość):

- Jak wygląda wzór na wyznacznik?
- Jak wykorzystywać *ciągłość* wyznacznika, gdy $K = \mathbb{R}$?
- Jak interpretować znak wyznacznika, gdy $K = \mathbb{R}$?
- Co wyznacznik ma wspólnego z objętością?

Przypomnienie. Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K oraz niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą współczynników układu U. Następujące warunki są równoważne

- układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- $r(A) = n$,
- A jest macierzą izomorfizmu,
- macierz A jest odwracalna,
- $\det A \neq 0$.

Kilka pytań na dziś (a raczej na przyszłość):

- Jak wygląda wzór na wyznacznik?
- Jak wykorzystywać *ciągłość* wyznacznika, gdy $K = \mathbb{R}$?
- Jak interpretować znak wyznacznika, gdy $K = \mathbb{R}$?
- Co wyznacznik ma wspólnego z objętością?
- Wyznacznik, a przekształcenia liniowe...

Notacja kolumnowa

Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą kolumnami macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Wówczas pisać będziemy

$$A = [A_1, \ldots, A_n].$$

Kolumny macierzy identycznościowej oznaczamy (kolejno) przez $E_1, \ldots, E_n$.

Notacja kolumnowa

Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą kolumnami macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Wówczas pisać będziemy

$$A = [A_1, \ldots, A_n].$$

Kolumny macierzy identycznościowej oznaczamy (kolejno) przez $E_1, \ldots, E_n$.

Macierze permutacji

Niech S_n będzie zbiorem wszystkich bijekcji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na siebie – **permutacji**. Każdej permutacji $\sigma \in S_n$ odpowiada **macierz permutacji**:

$$E_\sigma = [E_{\sigma(1)}, E_{\sigma(2)}, \ldots, E_{\sigma(n)}].$$

Liczbę $\det E_\sigma \in \{1, -1\}$ nazywamy **znakiem permutacji** σ, ozn. $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Przykład: rozważmy permutację $\sigma \in S_4$ daną wzorem:

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 4. \quad \sigma(4) = 1.$$

Przykład: rozważmy permutację $\sigma \in S_4$ daną wzorem:

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 4. \quad \sigma(4) = 1.$$

Notacja *tabelkowa*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Przykład: rozważmy permutację $\sigma \in S_4$ daną wzorem:

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 4. \quad \sigma(4) = 1.$$

Notacja *tabelkowa*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz tej permutacji ma postać:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Przykład: rozważmy permutację $\sigma \in S_4$ daną wzorem:

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 4. \quad \sigma(4) = 1.$$

Notacja *tabelkowa*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz tej permutacji ma postać:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Znak tej permutacji liczymy sprawdzając liczbę zamian kolumn potrzebną do uzyskania macierzy identycznościowej – parzysta liczba zamian oznacza wyznacznik równy 1, zaś nieparzysta liczba zamian – wyznacznik równy -1 (łatwo pokazać, że możliwości te wykluczają się dla $1 + 1 \neq 0$).

Przykład: rozważmy permutację $\sigma \in S_4$ daną wzorem:

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 4. \quad \sigma(4) = 1.$$

Notacja *tabelkowa*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz tej permutacji ma postać:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Znak tej permutacji liczymy sprawdzając liczbę zamian kolumn potrzebną do uzyskania macierzy identycznościowej – parzysta liczba zamian oznacza wyznacznik równy 1, zaś nieparzysta liczba zamian – wyznacznik równy -1 (łatwo pokazać, że możliwości te wykluczają się dla $1 + 1 \neq 0$). Zatem $\mathtt{sgn}(\sigma) = 1$.

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 1: Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ rozmiaru 2×2 mamy:

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 1: Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ rozmiaru 2×2 mamy:

- $S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, gdzie

$$\sigma_1(1) = 1, \sigma_1(2) = 2, \quad \sigma_2(1) = 2, \sigma_2(2) = 1.$$

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 1: Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ rozmiaru 2×2 mamy:

- $S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, gdzie
$$\sigma_1(1) = 1, \sigma_1(2) = 2, \quad \sigma_2(1) = 2, \sigma_2(2) = 1.$$
- Znaki permutacji: $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1, \operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1$.

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 1: Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ rozmiaru 2×2 mamy:

- $S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, gdzie
$$\sigma_1(1) = 1, \sigma_1(2) = 2, \quad \sigma_2(1) = 2, \sigma_2(2) = 1.$$
- Znaki permutacji: $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1, \operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1$.
- $\det A = 1 \cdot a_{11} a_{22} + (-1) a_{21} a_{12}$.

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 2: Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ rozmiaru 3×3 mamy:

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 2: Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ rozmiaru 3×3 mamy:

$$\det A = \underbrace{a_{11} a_{22} a_{33}}_{\sigma(1)=1, \sigma(2)=2, \sigma(3)=3} + \ldots$$

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 2: Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ rozmiaru 3×3 mamy:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + \underbrace{(-1)a_{11}a_{32}a_{23}}_{\sigma(1)=1,\sigma(2)=3,\sigma(3)=2} \dots$$

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 2: Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ rozmiaru 3×3 mamy:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)a_{11}a_{32}a_{23} + \underbrace{(-1)a_{21}a_{12}a_{33}}_{\sigma(1)=2,\sigma(2)=1,\sigma(3)=3} \dots$$

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 2: Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ rozmiaru 3×3 mamy:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}.$$

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 3: Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 3: Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \color{red}{1} \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a_{\sigma(4)4} a_{\sigma(5)5} \neq 0 \Leftrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 3: Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a_{\sigma(4)4} a_{\sigma(5)5} \neq 0 \Leftrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -1.$$

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 4: Dla macierzy górnotrójkątnej

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 4: Dla macierzy górnotrójkątnej

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \neq 0 \Leftrightarrow \sigma(i) = i$, dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Przykład 4: Dla macierzy górnotrójkątnej

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \neq 0 \Leftrightarrow \sigma(i) = i$, dla $i = 1, 2, \dots, n$. $\Rightarrow \det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Dowód. Z definicji wyznacznika wynikają następujące obserwacje:

- $\det[A_1, \dots, A_{i-1}, B + C, A_{i+1}, \dots, A_n] =$
  $\det[A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, A_{i-1}, C, A_{i+1}, \dots, A_n],$

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Dowód. Z definicji wyznacznika wynikają następujące obserwacje:

- $\det[A_1, \dots, A_{i-1}, B + C, A_{i+1}, \dots, A_n] =$
  $\det[A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, A_{i-1}, C, A_{i+1}, \dots, A_n]$,
- $\det[A_1, \dots, A_{i-1}, aC, A_{i+1}, \dots, A_n] = a \cdot \det[A_1, \dots, A_{i-1}, C, A_{i+1}, \dots, A_n]$.

Twierdzenie

Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi **wzór permutacyjny**:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Dowód. Z definicji wyznacznika wynikają następujące obserwacje:

- $\det[A_1, \dots, A_{i-1}, B + C, A_{i+1}, \dots, A_n] =$ $\det[A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, A_{i-1}, C, A_{i+1}, \dots, A_n]$,
- $\det[A_1, \dots, A_{i-1}, aC, A_{i+1}, \dots, A_n] = a \cdot \det[A_1, \dots, A_{i-1}, C, A_{i+1}, \dots, A_n]$.
- Zachodzi równość:
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 E_1 + \dots + a_n E_n.$$

Dowód, cd. Niech $A = [a_{ij}]$. Mamy:

$$\det[A_1, \ldots, A_n] = \det[a_{11}E_1 + \ldots + a_{n1}E_n, \ldots, a_{n1}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] =$$

Dowód, cd. Niech $A = [a_{ij}]$. Mamy:

$$\begin{aligned}
\det[A_1, \ldots, A_n] &= \det[a_{11}E_1 + \ldots + a_{n1}E_n, \ldots, a_{n1}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\
&= a_{11} \det[E_1, a_{12}E_1 + \ldots + a_{n2}E_n, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] + \\
&+ a_{21} \det[E_2, a_{12}E_1 + \ldots + a_{n2}E_n, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] + \\
&+ \ldots + \\
&+ a_{n1} \det[E_n, a_{12}E_1 + \ldots + a_{n2}E_n, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] =
\end{aligned}$$

Dowód, cd. Niech $A = [a_{ij}]$. Mamy:

$$
\begin{aligned}
\det[A_1, \ldots, A_n] &= \det[a_{11}E_1 + \ldots + a_{n1}E_n, \ldots, a_{n1}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\
&= a_{11}\det[E_1, a_{12}E_1 + \ldots + a_{n2}E_n, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] + \\
&+ a_{21}\det[E_2, a_{12}E_1 + \ldots + a_{n2}E_n, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] + \\
&+ \ldots + \\
&+ a_{n1}\det[E_n, a_{12}E_1 + \ldots + a_{n2}E_n, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] =
\end{aligned}
$$

Dowód, cd. Niech $A = [a_{ij}]$. Mamy:

$$
\begin{aligned}
\det[A_1, \ldots, A_n] &= \det[a_{11}E_1 + \ldots + a_{n1}E_n, \ldots, a_{n1}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\
&+ a_{11}a_{12}\det[E_1, E_1, , \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] + \\
&+ a_{11}a_{22}\det[E_1, E_2, , \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] + \\
&+ \ldots + \\
&+ a_{11}a_{n2}\det[E_1, E_n, , \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] + \\
&+ a_{21}\det[E_2, a_{12}E_1 + \ldots + a_{n2}E_n, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] + \\
&+ \ldots + \\
&+ a_{n1}\det[E_n, a_{12}E_1 + \ldots + a_{n2}E_n, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] =
\end{aligned}
$$

Dowód, cd. Niech $A = [a_{ij}]$. Mamy:

$$\begin{aligned} \det[A_1, \ldots, A_n] &= \det[a_{11}E_1 + \ldots + a_{n1}E_n, \ldots, a_{n1}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \det[E_i, a_{12}E_1 + \ldots + a_{n2}E_n, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \det[E_{i_1}, E_{i2}, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \end{aligned}$$

Dowód, cd. Niech $A = [a_{ij}]$. Mamy:

$$\begin{aligned}
\det[A_1, \ldots, A_n] &= \det[a_{11}E_1 + \ldots + a_{n1}E_n, \ldots, a_{n1}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \det[E_i, a_{12}E_1 + \ldots + a_{n2}E_n, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \det[E_{i_1}, E_{i2}, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\
&= \ldots = \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} \det[E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}].
\end{aligned}$$

Dowód, cd. Niech $A = [a_{ij}]$. Mamy:

$$
\begin{aligned}
\det[A_1, \ldots, A_n] &= \det[a_{11}E_1 + \ldots + a_{n1}E_n, \ldots, a_{n1}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \det[E_i, a_{12}E_1 + \ldots + a_{n2}E_n, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \det[E_{i_1}, E_{i2}, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\
&= \ldots = \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} \det[E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}].
\end{aligned}
$$

Ale $\det[E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}] = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i_k \text{ nie są parami różne}, \\ \operatorname{sgn}(\sigma) & \text{dla } \sigma \in S_n : \sigma(k) = i_k. \end{cases}$.

Dowód, cd. Niech $A = [a_{ij}]$. Mamy:

$$\begin{aligned}
\det[A_1, \ldots, A_n] &= \det[a_{11}E_1 + \ldots + a_{n1}E_n, \ldots, a_{n1}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \det[E_i, a_{12}E_1 + \ldots + a_{n2}E_n, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \det[E_{i_1}, E_{i2}, \ldots, a_{1n}E_1 + \ldots + a_{nn}E_n] = \\
&= \ldots = \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} \det[E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}] = \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}.
\end{aligned}$$

Wnioski:

- wyznacznik jest *funkcją wielomianową* wieli zmiennych,

Wnioski:

- wyznacznik jest *funkcją wielomianową* wielu zmiennych,
- dla $A \in M_n(K)$ funkcja $K \ni x \mapsto \mathtt{det}(A + xI)$ jest wielomianem stopnia n (pierwiastki tego wielomianu będą kluczowe w II semestrze),

Wnioski:

- wyznacznik jest *funkcją wielomianową* wielu zmiennych,
- dla $A \in M_n(K)$ funkcja $K \ni x \mapsto \det(A + xI)$ jest wielomianem stopnia n (pierwiastki tego wielomianu będą kluczowe w II semestrze),
- gdy $n \geq 2$ oraz $K = \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$), to jeśli $\det A = 0$, to dla wszystkich ϵ o *dostatecznie małym module* macierz $A + \epsilon I$ jest odwracalna.

Wnioski:

- wyznacznik jest *funkcją wielomianową* wielu zmiennych,
- dla $A \in M_n(K)$ funkcja $K \ni x \mapsto \det(A + xI)$ jest wielomianem stopnia n (pierwiastki tego wielomianu będą kluczowe w II semestrze),
- gdy $n \geq 2$ oraz $K = \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$), to jeśli $\det A = 0$, to dla wszystkich ϵ o *dostatecznie małym module* macierz $A + \epsilon I$ jest odwracalna.

Przykład zastosowania. Jeśli $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$, to wyznacznik macierzy blokowej

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|,$$

o ile $AC = CA$.

Wnioski:

- wyznacznik jest *funkcją wielomianową* wielu zmiennych,
- dla $A \in M_n(K)$ funkcja $K \ni x \mapsto \det(A + xI)$ jest wielomianem stopnia n (pierwiastki tego wielomianu będą kluczowe w II semestrze),
- gdy $n \geq 2$ oraz $K = \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$), to jeśli $\det A = 0$, to dla wszystkich ϵ o *dostatecznie małym module* macierz $A + \epsilon I$ jest odwracalna.

Przykład zastosowania. Jeśli $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$, to wyznacznik macierzy blokowej

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|,$$

o ile $AC = CA$ – to założenie jest konieczne, patrz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Przykład zastosowania. $A, B, C, D \in M_n(K)$, $AC = CA$. Niech A – odwracalna.

Przykład zastosowania. $A, B, C, D \in M_n(K)$, $AC = CA$. Niech A – odwracalna. Wówczas:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Przykład zastosowania. $A, B, C, D \in M_n(K)$, $AC = CA$. Niech A – odwracalna. Wówczas:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{vmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}.$$

Przykład zastosowania. $A, B, C, D \in M_n(K)$, $AC = CA$. Niech A – odwracalna. Wówczas:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\underbrace{\begin{vmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{vmatrix}}_{1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}}_{?} = \underbrace{\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}}_{|A||D-CA^{-1}B|}.$$

Przykład zastosowania. $A, B, C, D \in M_n(K)$, $AC = CA$. Niech A – odwracalna. Wówczas:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = \underbrace{|AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|}_{AC=CA}.$$

Przykład zastosowania. $A, B, C, D \in M_n(K)$, $AC = CA$. Niech A – odwracalna. Wówczas:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = \underbrace{|AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|}_{AC=CA}.$$

Niech $K = \mathbb{R}$. Jeśli $|A| = 0$, to weźmy d takie, że $|A + \epsilon I| \neq 0$, dla $0 < \epsilon < d$.

Przykład zastosowania. $A, B, C, D \in M_n(K)$, $AC = CA$. Niech A – odwracalna. Wówczas:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = \underbrace{|AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|}_{AC=CA}.$$

Niech $K = \mathbb{R}$. Jeśli $|A| = 0$, to weźmy d takie, że $|A + \epsilon I| \neq 0$, dla $0 < \epsilon < d$. Wtedy $(A + \epsilon I)C = C(A + \epsilon I)$, czyli z przypadku wyżej:

$$\begin{vmatrix} A + \epsilon I & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(A + \epsilon I)D - CB|.$$

Przykład zastosowania. $A, B, C, D \in M_n(K)$, $AC = CA$. Niech A – odwracalna. Wówczas:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = \underbrace{|AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|}_{AC=CA}.$$

Niech $K = \mathbb{R}$. Jeśli $|A| = 0$, to weźmy d takie, że $|A + \epsilon I| \neq 0$, dla $0 < \epsilon < d$. Wtedy $(A + \epsilon I)C = C(A + \epsilon I)$, czyli z przypadku wyżej:

$$\begin{vmatrix} A + \epsilon I & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(A + \epsilon I)D - CB|.$$

Biorąc $\epsilon \to 0$ dostajemy tezę.

Przykład zastosowania. $A, B, C, D \in M_n(K)$, $AC = CA$. Niech A – odwracalna. Wówczas:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = \underbrace{|AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|}_{AC=CA}.$$

Niech $K = \mathbb{R}$. Jeśli $|A| = 0$, to weźmy d takie, że $|A + \epsilon I| \neq 0$, dla $0 < \epsilon < d$. Wtedy $(A + \epsilon I)C = C(A + \epsilon I)$, czyli z przypadku wyżej:

$$\begin{vmatrix} A + \epsilon I & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(A + \epsilon I)D - CB|.$$

Biorąc $\epsilon \to 0$ dostajemy tezę.

A czy to działa dla $K \neq \mathbb{R}, \mathbb{C}$?

Definicja

Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots \beta_n\}$ przestrzeni V są:

- **zgodnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0$,
- **przeciwnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} < 0$.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots \beta_n\}$ przestrzeni V są:

- **zgodnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0$,
- **przeciwnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} < 0$.

Przykład. Bazy

$$\mathcal{A} = \{(3,2),(7,4)\}, \quad \mathcal{B} = \{(1,2),(1,0)\}$$

są zgodnie zorientowane, bo:

$$\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} > 0.$$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots \beta_n\}$ przestrzeni V są:

- **zgodnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0$,
- **przeciwnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} < 0$.

Zgodne zorientowanie jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich baz w $\mathbb{R}^n$.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots \beta_n\}$ przestrzeni V są:

- **zgodnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0$,
- **przeciwnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} < 0$.

Zgodne zorientowanie jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich baz w $\mathbb{R}^n$.

- **Zwrotność**. Jeśli $\mathcal{A}$ jest bazą $\mathbb{R}^n$ to
$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = I \Rightarrow \det I = 1,$$
czyli bazy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{A}$ są zgodnie zorientowane.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots \beta_n\}$ przestrzeni V są:

- **zgodnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0$,
- **przeciwnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} < 0$.

Zgodne zorientowanie jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich baz w $\mathbb{R}^n$.

- **Symetryczność**. Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są bazami $\mathbb{R}^n$ to

$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1},$$

czyli

$$\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0 \Rightarrow \det M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} > 0.$$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots \beta_n\}$ przestrzeni V są:

- **zgodnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0$,
- **przeciwnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} < 0$.

Zgodne zorientowanie jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich baz w $\mathbb{R}^n$.

- **Przechodniość.** Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ są bazami $\mathbb{R}^n$ to

$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}},$$

  czyli

$$\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0, \det M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} > 0 \Rightarrow \det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} > 0.$$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots \beta_n\}$ przestrzeni V są:

- **zgodnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0$,
- **przeciwnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} < 0$.

Uwaga: dla każdej bazy $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz bazy $\mathcal{A}' = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ powstałej przez zamianę kolejności wektorów na pierwszych dwóch współrzędnych mamy:

- bazy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{A}'$ są przeciwnie zorientowane,
- każda baza $\mathbb{R}^n$ jest zgodnie zorientowana z $\mathcal{A}$ lub $\mathcal{A}'$.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots \beta_n\}$ przestrzeni V są:

- **zgodnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0$,
- **przeciwnie zorientowane**, jeśli $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} < 0$.

Definicja

Rodzinę wszystkich baz zgodnie zorientowanych z pewną bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy **orientacją** przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest **zorientowana**, jeśli wybrana jest jedna z jej (dwóch) orientacji. W przestrzeni zorientowanej mówimy, że jej baza $\mathcal{A}$ jest **dodatnio (ujemnie) zorientowana**, jeśli zorientowana zgodnie (przeciwnie) z wybraną orientacją przestrzeni V.

Jeszcze jedna intuicja: niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ będą odwracalne.
Przyporządkowanie: $f : [0,1] \to M_n(K)$ nazwiemy **drogą nieosobliwą** w $M_n(\mathbb{R})$ łączącą A, B, jeśli:

- $f(0) = A, f(1) = B$.

Jeszcze jedna intuicja: niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ będą odwracalne.
Przyporządkowanie: $f : [0,1] \to M_n(K)$ nazwiemy **drogą nieosobliwą** w $M_n(\mathbb{R})$ łączącą A, B, jeśli:

- $f(0) = A, f(1) = B$.
- dla $t \in [0,1]$ macierz $f(t)$ jest odwracalna,

Jeszcze jedna intuicja: niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ będą odwracalne.
Przyporządkowanie: $f : [0,1] \to M_n(K)$ nazwiemy **drogą nieosobliwą** w $M_n(\mathbb{R})$ łączącą A, B, jeśli:

- $f(0) = A, f(1) = B$.
- dla $t \in [0,1]$ macierz $f(t)$ jest odwracalna,
- jeśli $f(t) = [a_{ij}(t)]$, to funkcje $t \mapsto a_{ij}(t)$ są ciągłe.

Jeszcze jedna intuicja: niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ będą odwracalne.
Przyporządkowanie: $f : [0,1] \to M_n(K)$ nazwiemy **drogą nieosobliwą** w $M_n(\mathbb{R})$ łączącą A, B, jeśli:

- $f(0) = A, f(1) = B$.
- dla $t \in [0,1]$ macierz $f(t)$ jest odwracalna,
- jeśli $f(t) = [a_{ij}(t)]$, to funkcje $t \mapsto a_{ij}(t)$ są ciągłe.

Przykład. Funkcja

$$[0,1] \ni t \mapsto \begin{bmatrix} 1+t & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest drogą nieosobliwą łączącą

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeszcze jedna intuicja: niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ będą odwracalne. Przyporządkowanie: $f : [0,1] \to M_n(K)$ nazwiemy **drogą nieosobliwą** w $M_n(\mathbb{R})$ łączącą A, B, jeśli:

- $f(0) = A, f(1) = B$.
- dla $t \in [0,1]$ macierz $f(t)$ jest odwracalna,
- jeśli $f(t) = [a_{ij}(t)]$, to funkcje $t \mapsto a_{ij}(t)$ są ciągłe.

Twierdzenie (dowód w II semestrze)

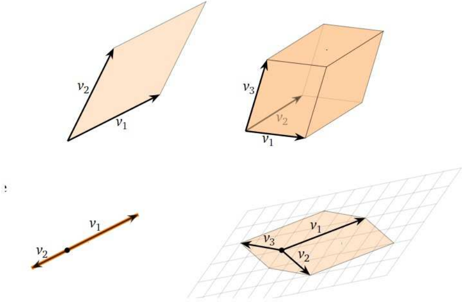
Baza $(A_1, \ldots, A_n)$ jest zorientowana zgodnie z bazą standardową $(E_1, \ldots, E_n)$ (w $\mathbb{R}^n$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieosobliwa droga pomiędzy macierzami

$$[A_1, \ldots, A_n], \quad [E_1, \ldots, E_n],$$

Definicja

Równoległościanem rozpiętym na wektorach $v_1, \ldots, v_n$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy podzbiór

$$R(v_1, \ldots, v_n) = \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \,|\, 0 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 1\}.$$



Definicja

Równoległościanem rozpiętym na wektorach $v_1, \ldots, v_n$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy podzbiór

$$R(v_1, \ldots, v_n) = \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \,|\, 0 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 1\}.$$

Definicja

Objętością (n - wymiarową) równoległościanu $R = R(v_1, \ldots, v_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy wielkość:

$$\mathrm{vol}_n(R) = \mathrm{vol}_n(R(v_1, \ldots, v_n)) = |\det[v_1, \ldots, v_n]|.$$

Uwaga: czasami możemy mówić o *objętości ze znakiem* i wtedy w definicji opuszczamy wartość bezwzględną.

Twierdzenie (przyszły semestr)

Jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem liniowym oraz $A = M(f)^{st}_{st}$, to dla dowolnego równoległościanu $R \subseteq \mathbb{R}^n$ zbiór $f(R)$ również jest równoległościanem oraz mamy:

$$\mathrm{vol}_n(f(R)) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}_n(R).$$

Twierdzenie (przyszły semestr)

Jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem liniowym oraz $A = M(f)_{st}^{st}$, to dla dowolnego równoległościanu $R \subseteq \mathbb{R}^n$ zbiór $f(R)$ również jest równoległościanem oraz mamy:

$$\mathrm{vol}_n(f(R)) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}_n(R).$$

Idea: na Analizie 2 twierdzenie to przyda się do wyznaczania miary *obiektów nieliniowych*, np. pola elipsy (żartuję, na AM 2 robi się poważne rzeczy).