Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I MECHANIKI

WYKŁAD 12, 19.01.2021 r.

Przypomnienie

Definiujemy funkcję $\det : M_n(K) \to K$ w sposób rekurencyjny:

- dla $n = 1$ mamy $\det : M_1(K) \to K$, gdzie $\det A = a$, dla $A = [a]$.
- dla dowolnej macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ określamy $\det : M_n(K) \to K$ na podstawie funkcji $\det : M_{n-1}(K) \to K$ wzorem:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}. \quad (\star)$$

Funkcję $\det : M_n(K) \to K$ określoną w $(\star)$ nazywamy rozwinięciem Laplace'a względem pierwszego wiersza.

Można też zdefiniować analogiczne funkcje $\det : M_n(K) \to K$ rekurencyjnie przez

- rozwinięcie względem i-tego wiersza

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

- rozwinięcie względem j-tej kolumny:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Można też zdefiniować analogiczne funkcje $\det : M_n(K) \to K$ rekurencyjnie przez

- rozwinięcie względem i-tego wiersza

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

- rozwinięcie względem j-tej kolumny:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Fakt (do pokazania)

Wszystkie funkcje określone wyżej na $M_n(K)$ przez rozwinięcia względem i-tego wiersza lub j-tej kolumny, dla $1 \leq i, j \leq n$, są identyczne.

Było

Dla każdego $n \geq 1$ istnieje co najwyżej jedna funkcja $\det : M_n(K) \to K$, zwana wyznacznikiem, taka, że:

1. Dla $1 \leq k \leq n$ funkcja $\det$ jest jednorodna względem k-tego wiersza.
2. Dla $1 \leq k \leq n$ funkcja $\det$ jest addytywna względem k-tego wiersza.
3. $\det A = 0$, jeśli A ma identyczne dwa sąsiednie wiersze.
4. $\det I_n = 1$.

Było

Dla każdego $n \geq 1$ istnieje co najwyżej jedna funkcja $\det : M_n(K) \to K$, zwana wyznacznikiem, taka, że:

1. Dla $1 \leq k \leq n$ funkcja $\det$ jest jednorodna względem k-tego wiersza.
2. Dla $1 \leq k \leq n$ funkcja $\det$ jest addytywna względem k-tego wiersza.
3. $\det A = 0$, jeśli A ma identyczne dwa sąsiednie wiersze.
4. $\det I_n = 1$.

Pokażemy teraz, że wszystkie funkcje z $M_n(K)$ do K określone przez rozwinięcia względem i-tego wiersza lub j-tej kolumny spełniają warunki (1)-(4).

Funkcja $\det$: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

Funkcja $\det$: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

Jednorodność zdefiniowanej na początku funkcji $\det$. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Mamy:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Niech B powstaje z A przez pomnożenie pewnego wiersza przez $c \in K$. Chcemy pokazać:

$$\det B = c \det A.$$

Funkcja det: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

Jednorodność zdefiniowanej na początku funkcji det. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$.

- Przypadek 1. Pierwszy wiersz A mnożymy przez $c \in K$ dostając B. Mamy:

$$\det B = \det \begin{bmatrix} \color{red}{ca_{11}} & \color{red}{ca_{12}} & \dots & \color{red}{ca_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Funkcja $\det$: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

Jednorodność zdefiniowanej na początku funkcji $\det$. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$.

- Przypadek 1. Pierwszy wiersz A mnożymy przez $c \in K$ dostając B. Mamy:

$$\det B = \det \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Zatem $B_{1j} = A_{1j}$, dla $1 \leq j \leq n$, czyli $\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} ca_{1j} \det A_{1j} = c \det A$.

Funkcja det: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

Jednorodność zdefiniowanej na początku funkcji det. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$.

- Przypadek 2. Inny niż pierwszy wiersz A mnożymy przez $c \in K$ dostając B. Mamy np.:

$$\det B = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \dots & ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Funkcja det: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

Jednorodność zdefiniowanej na początku funkcji det. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$.

- Przypadek 2. Inny niż pierwszy wiersz A mnożymy przez $c \in K$ dostając B. Mamy np.:
$$\det B = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \dots & ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}.$$
Każda z macierzy B_{1j} powstaje z A_{1j} przez pomnożenie pewnego wiersza przez stałą. Z założenia indukcyjnego $\det B_{1j} = c \det A_{1j}$. Zatem:
$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det B_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} c \det A_{1j} = c \det A.$$

Funkcja det: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

Addytywność zdefiniowanej na początku funkcji det. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Mamy:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Chcemy pokazać:

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} + y_{k1} & \dots & x_{kn} + y_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{Z} = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \dots & x_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{X} + \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k1} & \dots & y_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{Y}.$$

Funkcja det: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

Addytywność zdefiniowanej na początku funkcji det. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Mamy:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.$$

- Przypadek 1. $k = 1$. Wówczas $X_{1j} = Y_{1j} = Z_{1j}$, bo macierze X, Y, Z różnią się tylko pierwszymi wierszami. Zatem:

$$\begin{aligned}\det Z &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (x_{kj} + y_{kj}) \det Z_{1j} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (x_{kj}) \det X_{1j} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (y_{kj}) \det Y_{1j} = \\ &= \det X + \det Y.\end{aligned}$$

Funkcja det: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

Addytywność zdefiniowanej na początku funkcji det. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Mamy:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.$$

- Przypadek 2. $k \neq 1$. Wówczas $z_{1j} = x_{1j} = y_{1j}$ oraz z założenia indukcyjnego $\det Z_{1j} = \det X_{1j} + \det Y_{1j}$. Zatem:

$$\det Z = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} z_{1j} \det Z_{1j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} x_{1j} \det X_{1j} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} y_{1j} \det Y_{1j} = \det X + \det Y.$$

Funkcja $\det$: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

- Podobnie jak dla (1), (2) wykazuje się, że rozważana funkcja spełnia (3).

Funkcja det: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

- Podobnie jak dla (1), (2) wykazuje się, że rozważana funkcja spełnia (3).
- Fakt, że $\operatorname{det}(I_n) = 1$ jest prostym ćwiczeniem.

Funkcja $\det$: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

- Podobnie jak dla (1), (2) wykazuje się, że rozważana funkcja spełnia (3).
- Fakt, że $\det(I_n) = 1$ jest prostym ćwiczeniem.
- Zatem wyznacznik określony przez rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza jest funkcją z $M_n(K)$ do K, spełniającą (1)-(4), a zatem zgodnie z wykazanym już twierdzeniem to **jedyna** taka funkcja.

Funkcja $\det$: *rozwinięcie względem pierwszego wiersza* spełnia (1)-(4)

- Podobnie jak dla (1), (2) wykazuje się, że rozważana funkcja spełnia (3).
- Fakt, że $\det(I_n) = 1$ jest prostym ćwiczeniem.
- Zatem wyznacznik określony przez rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza jest funkcją z $M_n(K)$ do K, spełniającą (1)-(4), a zatem zgodnie z wykazanym już twierdzeniem to **jedyna** taka funkcja.

* * *

UWAGA

Powyższe dowody pozostają bez istotnych zmian, dla funkcji: *rozwinięcie Laplace'a względem k-tego wiersza*. Z jednoznaczności funkcji spełniającej (1)-(4) dostajemy wniosek...

Wniosek

Dla każdego $1 \leq i \leq n$ oraz macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi równość:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Łatwo widzieć, że funkcja *rozwinięcie Laplace'a macierzy A względem j-tej kolumny* to funkcja tożsama z funkcją *rozwinięcie Laplace'a macierzy A^T względem j-tego wiersza*. Wobec formuły $\det A = \det A^T$ mamy:

Wniosek

Dla każdego $1 \leq j \leq n$ oraz macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ mamy:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Przypomnienie pozostałych faktów o wyznaczniku, wykazanych ostatnio:

- jeśli A jest górnotrójkątna to $\det A$ jest iloczynem wyrazów na przekątnej A,

Przypomnienie pozostałych faktów o wyznaczniku, wykazanych ostatnio:

- jeśli A jest górnotrójkątna to $\det A$ jest iloczynem wyrazów na przekątnej A,
- dla dowolnych $A, B \in M_n(K)$ mamy $\det AB = \det A \cdot \det B$,

Przypomnienie pozostałych faktów o wyznaczniku, wykazanych ostatnio:

- jeśli A jest górnotrójkątna to $\det A$ jest iloczynem wyrazów na przekątnej A,
- dla dowolnych $A, B \in M_n(K)$ mamy $\det AB = \det A \cdot \det B$,
- $\det A \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest odwracalna.

Przypomnienie pozostałych faktów o wyznaczniku, wykazanych ostatnio:

- jeśli A jest górnotrójkątna to $\det A$ jest iloczynem wyrazów na przekątnej A,
- dla dowolnych $A, B \in M_n(K)$ mamy $\det AB = \det A \cdot \det B$,
- $\det A \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest odwracalna.

Dwa proste wnioski.

- Jeśli $A \in M_n(K)$ jest odwracalna, to $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

Przypomnienie pozostałych faktów o wyznaczniku, wykazanych ostatnio:

- jeśli A jest górnotrójkątna to $\det A$ jest iloczynem wyrazów na przekątnej A,
- dla dowolnych $A, B \in M_n(K)$ mamy $\det AB = \det A \cdot \det B$,
- $\det A \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest odwracalna.

Dwa proste wnioski.

- Jeśli $A \in M_n(K)$ jest odwracalna, to $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.
- Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n = n_1 + n_2$ oraz niech
  - $A_1 \in M_{n_1}(K)$ powstaje z A przez usunięcie ostatnich n_2 wierszy i kolumn,
  - $A_2 \in M_{n_2}(K)$ powstaje z A przez usunięcie pierwszych n_1 wierszy i kolumn.

  Jeśli A ma *postać blokową* $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{bmatrix}$, dla macierzy zerowej $0 \in M_{n_1 \times n_2}(K)$ oraz dowolnej $* \in M_{n_2 \times n_1}(K)$ to $\det A = \det A_1 \cdot \det A_2$.

Słynny przykład: wyznacznik Vandermonde'a.

Słynny przykład: wyznacznik Vandermonde'a.

Definicja

Dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in K$, gdzie $n \geq 2$, macierz $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ o wyrazach $a_{ij} = x_i^{j-1}$, czyli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

nazywamy **macierzą Vandermonde'a** (układu $x_1, \dots, x_n$).
Wyznacznik tej macierzy oznaczamy przez

$$\Delta(x_1, \dots, x_n).$$

Prosty problem motywujący: niech $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ będą elementami K^2, przy czym $x_i \neq x_j$, dla $i \neq j$. Szukamy wielomianu stopnia $n-1$ postaci:

$$P_{n-1} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

takiego, że

$$\begin{cases} P_{n-1}(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} & = y_1 \\ P_{n-1}(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} & = y_2 \\ & \vdots \\ P_{n-1}(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} & = y_n. \end{cases}.$$

Prosty problem motywujący: niech $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ będą elementami K^2, przy czym $x_i \neq x_j$, dla $i \neq j$. Szukamy wielomianu stopnia $n-1$ postaci:

$$P_{n-1} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

takiego, że

$$\begin{cases} P_{n-1}(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} & = y_1 \\ P_{n-1}(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} & = y_2 \\ & \vdots \\ P_{n-1}(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} & = y_n. \end{cases},$$

czyli rozwiązujemy układ równań liniowych o macierzy Vandermonde'a:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Prosty problem motywujący: niech $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ będą elementami K^2, przy czym $x_i \neq x_j$, dla $i \neq j$. Szukamy wielomianu stopnia $n-1$ postaci:

$$P_{n-1} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

takiego, że

$$\begin{cases} P_{n-1}(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} & = y_1 \\ P_{n-1}(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} & = y_2 \\ & \vdots \\ P_{n-1}(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} & = y_n. \end{cases}.$$

Czy ten układ ma rozwiązanie? Okazuje się, że tak, bo:

Fakt

Zachodzi równość:

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Dowód indukcyjny wzoru $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

- Dla $n = 2$ mamy: $\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} = x_2 - x_1$.

Dowód indukcyjny wzoru $\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

- Dla $n = 2$ mamy: $\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} = x_2 - x_1$.
- Dla $n > 2$ wystarczy pokazać, że:

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot \Delta(x_2, \dots, x_n).$$

Dowód indukcyjny wzoru $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

- Dla $n = 2$ mamy: $\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} = x_2 - x_1$.
- Dla $n > 2$ bierzemy

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Dowód indukcyjny wzoru $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

- Dla $n = 2$ mamy: $\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} = x_2 - x_1$.
- Dla $n > 2$ odejmujemy pierwszy wiersz od pozostałych:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-2} - x_1^{n-2} & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{bmatrix}$$

nie zmieniając tym samym wyznacznika.

Dowód indukcyjny wzoru $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

- Dla $n = 2$ mamy: $\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} = x_2 - x_1$.
- Dla $n > 2$ odejmujemy pierwszy wiersz od pozostałych:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-2} - x_1^{n-2} & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{bmatrix}$$

nie zmieniając tym samym wyznacznika. Zatem rozwijając względem pierwszej kolumny mamy:

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-2} - x_1^{n-2} & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Dowód indukcyjny wzoru $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

- Trudno w to uwierzyć, ale macierz

$$X = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-2} - x_1^{n-2} & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{bmatrix}.$$

  można *zeschodkować*, czego nie zrobimy.

Dowód indukcyjny wzoru $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

- Trudno w to uwierzyć, ale macierz

$$X = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-2} - x_1^{n-2} & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{bmatrix}.$$

można *zeschodkować*, czego nie zrobimy. Udając, że nie *schodkujemy* wyciągamy *królika z kapelusza* zauważając, że:

$$X = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_3 - x_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_n - x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i} x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i} x_1^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i} x_1^i \end{bmatrix}.$$

Dowód indukcyjny wzoru $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

- Trudno w to uwierzyć, ale macierz

$$X = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-2} - x_1^{n-2} & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{bmatrix}.$$

  można *zeschodkować*, czego nie zrobimy. Udając, że nie *schodkujemy* wyciągamy *królika z kapelusza* zauważając, że:

$$X = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_3 - x_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_n - x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i} x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i} x_1^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i} x_1^i \end{bmatrix}.$$

- Zatem z twierdzenia o wyznaczniku iloczynu...

Dowód indukcyjny wzoru $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

- Zatem z twierdzenia o wyznaczniku iloczynu...

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i} x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i} x_1^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i} x_1^i \end{bmatrix}.$$

Dowód indukcyjny wzoru $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

- Zatem z twierdzenia o wyznaczniku iloczynu...

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i} x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i} x_1^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i} x_1^i \end{bmatrix}.$$

- Macierz

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i} x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i} x_1^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i} x_1^i \end{bmatrix}$$

  można *zeschodkować*, ale przecież możemy udać, że tego nie robimy *zauważając* kolejny rozkład...

Dowód indukcyjny wzoru $\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

- Zatem z twierdzenia o wyznaczniku iloczynu...

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i} x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i} x_1^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i} x_1^i \end{bmatrix}.$$

- Macierz, której wyznacznika szukamy to iloczyn

$$\begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_2^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} \\ 0 & 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Dowód indukcyjny wzoru $\Delta(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$.

- Zatem z twierdzenia o wyznaczniku iloczynu...

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & x_2+x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i}x_1^i \\ 1 & x_3+x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i}x_1^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n+x_1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i}x_1^i \end{bmatrix}.$$

- Macierz, której wyznacznika szukamy to iloczyn

$$\begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_2^2 & \ldots & x_n^{n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} \\ 0 & 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

- ... czyli z twierdzenia o wyznaczniku iloczynu mamy

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot\Delta(x_2,\ldots,x_n)\cdot 1.$$

Wniosek

Wyznacznik Vandermonde'a $V(x_1, \ldots, x_n)$ jest niezerowy wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i \neq x_j$, dla $i \neq j$.

Wniosek

Wyznacznik Vandermonde'a $V(x_1, \ldots, x_n)$ jest niezerowy wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i \neq x_j$, dla $i \neq j$.

A zatem: jeśli $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ są elementami K^2, przy czym $x_i \neq x_j$, dla $i \neq j$, to istnieją jednoznacznie wyznaczone $a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ takie, że:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} & = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} & = y_2 \\ & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} & = y_n. \end{cases},$$

bo macierz tego układu jest odwracalna, czyli ma rząd n.

Wniosek

Wyznacznik Vandermonde'a $V(x_1, \ldots, x_n)$ jest niezerowy wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i \neq x_j$, dla $i \neq j$.

A zatem: jeśli $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ są elementami K^2, przy czym $x_i \neq x_j$, dla $i \neq j$, to istnieją jednoznacznie wyznaczone $a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ takie, że:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} & = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} & = y_2 \\ & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} & = y_n. \end{cases},$$

bo macierz tego układu jest odwracalna, czyli ma rząd n.
Jeśli chcemy poznać a_i potrzebujemy wzorów Cramera.
Odpowiedź i kilka pokrewnych zadań można znaleźć w:
`https://mimuw.edu.pl/~amecel/2017z/galj/vandermonde.pdf`

Twierdzenie

Niech $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ będą macierzami w $M_n(K)$, przy czym A jest odwracalna oraz

$$b_{ij} = (-1)^{j+i}\frac{\det A_{ji}}{\det A},$$

dla każdych i, j. Wówczas $AB = I$, czyli B jest macierzą odwrotną do A.

Przykład. Dla macierzy

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$$

macierz $B = [b_{ij}]$, gdzie

$$b_{ij} = (-1)^{j+i} \frac{\det A_{ji}}{\det A}$$

to:

$$B = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie

Niech $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ będą macierzami w $M_n(K)$, przy czym A jest odwracalna oraz

$$b_{ij} = (-1)^{j+i} \frac{\det A_{ji}}{\det A},$$

dla każdych i, j. Wówczas $AB = I$, czyli B jest macierzą odwrotną do A.

Dowód: mnożymy A przez B, czyli

Dowód: mnożymy A przez B, czyli

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{2+1}\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ (-1)^{1+2}\det A_{21} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n}\det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det A_{1n} & (-1)^{n+2}\det A_{2n} & \dots & (-1)^{n+n}\det A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dowód: mnożymy A przez B, czyli

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{2+1}\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ (-1)^{1+2}\det A_{21} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n}\det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det A_{1n} & (-1)^{n+2}\det A_{2n} & \dots & (-1)^{n+n}\det A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że jeśli $D = [d_{ij}]$ jest macierzą powstałą z A przez zastąpienie j-tego wiersza i-tym wierszem, to $\det D_{js} = \det A_{js}$, dla każdego $1 \leq s \leq n$.

Dowód: mnożymy A przez B, czyli

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{2+1}\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ (-1)^{1+2}\det A_{21} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n}\det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det A_{1n} & (-1)^{n+2}\det A_{2n} & \dots & (-1)^{n+n}\det A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że jeśli $D = [d_{ij}]$ jest macierzą powstałą z A przez zastąpienie j-tego wiersza i-tym wierszem, to $\det D_{js} = \det A_{js}$, dla każdego $1 \le s \le n$. A zatem licząc $\det D$ względem j-tego wiersza mamy:

$$\det D = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{j+s} d_{js} \det D_{js} = \sum_{s=1} (-1)^{j+s} a_{is} \det A_{js}.$$

co jest równe wyrazowi w i-tym wierszu i j-tej kolumnie iloczynu wyżej!

Dowód: mnożymy A przez B, czyli

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{2+1}\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ (-1)^{1+2}\det A_{21} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n}\det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det A_{1n} & (-1)^{n+2}\det A_{2n} & \dots & \det A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że jeśli $D = [d_{ij}]$ jest macierzą powstałą z A przez zastąpienie j-tego wiersza i-tym wierszem, to $\det D_{js} = \det A_{js}$, dla każdego $1 \leq s \leq n$. A zatem licząc $\det D$ względem j-tego wiersza mamy:

$$\det D = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{j+s} d_{js} \det D_{js} = \sum_{s=1} (-1)^{j+s} a_{is} \det A_{js}.$$

co jest równe wyrazowi w i-tym wierszu i j-tej kolumnie iloczynu wyżej! Ale przecież jeśli $i \neq j$ to D ma dwa identyczne wiersze, czyli:

$$\det D = \begin{cases} \det A, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j. \end{cases}.$$

Stąd AB, czyli

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \det A_{11} & (-1)^{2+1} \det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1} \det A_{n1} \\ (-1)^{1+2} \det A_{21} & (-1)^{2+2} \det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n} \det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} \det A_{1n} & (-1)^{n+2} \det A_{2n} & \dots & \det A_{nn} \end{bmatrix}.$$

równe jest

$$\frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = I,$$

co kończy dowód.

Stąd AB, czyli

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{2+1}\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ (-1)^{1+2}\det A_{21} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n}\det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det A_{1n} & (-1)^{n+2}\det A_{2n} & \dots & \det A_{nn} \end{bmatrix}.$$

równe jest

$$\frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = I,$$

co kończy dowód.

Wniosek

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, będzie odwracalna. Wówczas $A^{-1} = [b_{ij}]$, gdzie $b_{ij} = (-1)^{j+i}\frac{\det A_{ji}}{\det A}$.

Twierdzenie (wzory Cramera)

Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o macierzy współczynników $A \in M_n(K)$ i kolumnie wyrazów wolnych $B \in M_{n\times 1}(K)$. Załóżmy, że $\det A \neq 0$. Wówczas układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie $s_1, \ldots, s_n$, przy czym dla każdego i

$$s_i = \frac{\det G_i}{\det A},$$

gdzie G_i jest macierzą powstałą z A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną B.

Twierdzenie (wzory Cramera)

Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o macierzy współczynników $A \in M_n(K)$ i kolumnie wyrazów wolnych $B \in M_{n\times 1}(K)$. Załóżmy, że $\det A \neq 0$. Wówczas układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie $s_1, \ldots, s_n$, przy czym dla każdego i

$$s_i = \frac{\det G_i}{\det A},$$

gdzie G_i jest macierzą powstałą z A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną B.

Zobaczmy dla przykładu układ równań nad $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{cases}.$$

Jeśli A jest macierzą współczynników tego układu to:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, |G_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, |G_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{|G_1|}{|A|} = 1, y = \frac{|G_2|}{|A|} = 1.$$

Twierdzenie (wzory Cramera)

Niech U będzie układem n równań liniowych z n niewiadomymi o macierzy współczynników $A \in M_n(K)$ i kolumnie wyrazów wolnych $B \in M_{n\times 1}(K)$. Załóżmy, że $\det A \neq 0$. Wówczas układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie $s_1, \ldots, s_n$, przy czym dla każdego i

$$s_i = \frac{\det G_i}{\det A},$$

gdzie G_i jest macierzą powstałą z A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną B.

Dowód. Niech U będzie układem n równań z n niewiadomymi nad K:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad .$$

Wówczas mamy:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

oraz:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas mamy:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

oraz:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Stąd mnożąc z lewej strony przez A^{-1} mamy:

$$A^{-1} A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas mamy:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

oraz:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Stąd mnożąc z lewej strony przez A^{-1} mamy:

$$A^{-1}A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Ale A^{-1} ma wyrazy c_{ij} postaci: $(-1)^{j+i} \frac{\det A_{ji}}{\det A}$, mnożąc dalej dostajemy...

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \det A_{11} & (-1)^{2+1} \det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1} \det A_{n1} \\ (-1)^{1+2} \det A_{12} & (-1)^{2+2} \det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n} \det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} \det A_{1n} & (-1)^{2+n} \det A_{2n} & \dots & (-1)^{n+n} \det A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{2+1}\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ (-1)^{1+2}\det A_{12} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n}\det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}\det A_{1n} & (-1)^{2+n}\det A_{2n} & \dots & (-1)^{n+n}\det A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

czyli jeśli G_i to macierz powstała z A przez zamianę i-tej kolumny na B, to (usuwając z G_i oraz A kolumnę i-tą i s-ty wiersz) mamy $(G_i)_{si} = A_{si}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \det A_{11} & (-1)^{2+1} \det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1} \det A_{n1} \\ (-1)^{1+2} \det A_{12} & (-1)^{2+2} \det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n} \det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} \det A_{1n} & (-1)^{2+n} \det A_{2n} & \dots & (-1)^{n+n} \det A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

czyli jeśli G_i to macierz powstała z A przez zamianę i-tej kolumny na B, to (usuwając z G_i oraz A kolumnę i-tą i s-ty wiersz) mamy $(G_i)_{si} = A_{si}$, zatem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} \det A_{s1} b_{s1}}{\det A} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n} \det A_{sn} b_{sn}}{\det A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} \det(G_1)_{s1} b_{s1}}{\det A} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n} \det(G_n)_{sn} b_{sn}}{\det A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\det G_1}{\det A} \\ \vdots \\ \frac{\det G_n}{\det A} \end{bmatrix}.$$

Wniosek z tw. Kroneckera-Capeliego

Niech U będzie układem n równań liniowych nad ciałem K z n niewiadomymi o macierzy współczynników $A \in M_n(K)$ i kolumnie wyrazów wolnych $B \in M_{n\times 1}(K)$. Niech macierz G_i powstaje z A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną B. Wówczas zachodzi jedna z trzech (wykluczających się) możliwości:

(1) $\det A \neq 0$.
Wówczas układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie postaci:

$$s_1 = \frac{\det G_1}{\det A}, \quad \dots, \quad s_n = \frac{\det G_n}{\det A},$$

(2) $\det A = 0$ oraz $\det G_i = 0$, dla każdego i.
Wówczas przestrzeń rozwiązań układu U ma wymiar większy od 0.

(3) $\det A = 0$ oraz $\det G_j \neq 0$, dla pewnego j.
Wówczas układ U nie ma rozwiązań (bo wtedy $r(A_u) > r(A)$).