Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 11, 12.01.2021 r.

Definicja 1

Dla każdego całkowitego $n \geq 1$ zbiór macierzy $M_{n \times n}(K)$ nazywamy zbiorem **macierzy kwadratowych rozmiaru *n*** i oznaczamy $M_n(K)$.

Definicja 1

Dla każdego całkowitego $n \geq 1$ zbiór macierzy $M_{n\times n}(K)$ nazywamy zbiorem **macierzy kwadratowych rozmiaru n** i oznaczamy $M_n(K)$.

Definicja 2

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Dla $1 \leq i, j \leq n$ określamy macierze $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ otrzymane z A przez skreślenie odpowiednio i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Definicja 1

Dla każdego całkowitego $n \geq 1$ zbiór macierzy $M_{n\times n}(K)$ nazywamy zbiorem **macierzy kwadratowych rozmiaru *n*** i oznaczamy $M_n(K)$.

Definicja 2

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Dla $1 \leq i, j \leq n$ określamy macierze $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ otrzymane z A przez skreślenie odpowiednio i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Przykład: dla macierzy $A \in M_3(\mathbb{R})$ postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

mamy:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definicja 3

Definiujemy funkcję $\det : M_n(K) \to K$ w sposób rekurencyjny:

- dla $n = 1$ mamy $\det : M_1(K) \to K$, gdzie $\det A = a$ dla $A = [a]$.

Definicja 3

Definiujemy funkcję $\det : M_n(K) \to K$ w sposób rekurencyjny:

- dla $n = 1$ mamy $\det : M_1(K) \to K$, gdzie $\det A = a$ dla $A = [a]$.
- dla $n = 2$ i macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ mamy $\det : M_2(K) \to K$ dane wzorem:

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

Definicja 3

Definiujemy funkcję $\det : M_n(K) \to K$ w sposób rekurencyjny:

- dla $n = 1$ mamy $\det : M_1(K) \to K$, gdzie $\det A = a$ dla $A = [a]$.
- dla $n = 2$ i macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ mamy $\det : M_2(K) \to K$ dane wzorem:

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

- dla $n = 3$ i macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ mamy

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det A_{13}.$$

Definicja 3

Definiujemy funkcję $\det : M_n(K) \to K$ w sposób rekurencyjny:

- dla $n = 1$ mamy $\det : M_1(K) \to K$, gdzie $\det A = a$ dla $A = [a]$.
- dla dowolnej macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ określamy $\det : M_n(K) \to K$ na podstawie funkcji $\det : M_{n-1}(K) \to K$ wzorem:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}. \quad (\star)$$

Definicja 3

Definiujemy funkcję $\det : M_n(K) \to K$ w sposób rekurencyjny:

- dla $n = 1$ mamy $\det : M_1(K) \to K$, gdzie $\det A = a$ dla $A = [a]$.
- dla dowolnej macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ określamy $\det : M_n(K) \to K$ na podstawie funkcji $\det : M_{n-1}(K) \to K$ wzorem:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}. \quad (\star)$$

Wzór $(\star)$ nazywamy rozwinięciem Laplace'a względem pierwszego wiersza.

Definicja 3

Definiujemy funkcję $\det : M_n(K) \to K$ w sposób rekurencyjny:

- dla $n = 1$ mamy $\det : M_1(K) \to K$, gdzie $\det A = a$ dla $A = [a]$.
- dla dowolnej macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ określamy $\det : M_n(K) \to K$ na podstawie funkcji $\det : M_{n-1}(K) \to K$ wzorem:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}. \quad (\star)$$

Wzór $(\star)$ nazywamy rozwinięciem Laplace'a względem pierwszego wiersza.

A gdyby określić analogiczne rozwinięcia względem innych wierszy lub kolumn? Okazuje się, że dostaniemy tę samą funkcję! Dowód zajmie cały wykład...

Definicja 1

Powiemy, że funkcja $f : M_n(K) \to K$, jest **jednorodna względem k-tego wiersza**, jeśli dla kazdej macierzy $A \in M_n(K)$ oraz dla każdego $c \in K$

$$f(A') = c \cdot f(A),$$

gdzie A' powstaje z A przez pomnożenie k-tego wiersza przez c. Innymi słowy, jeśli $w_1, \ldots, w_n \in K^n$ są wierszami macierzy A, to

$$f\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ cw_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = c \cdot f\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Definicja 2

Powiemy, że funkcja $f : M_n(K) \to K$, jest **addytywna względem k-tego wiersza**, jeśli dla każdej trójki macierzy $A, B, C \in M_n(K)$ takiej, że:

- k-ty wiersz macierzy C to suma k-tego wiersza A oraz k-tego wiersza B,
- l-te macierzy A, B, C są identyczne, dla $l \neq k$.

zachodzi

$$f(C) = f(A) + f(B).$$

Innymi słowy, dla dowolnych $w_1, \ldots, w_{k-1}, w_k', w_k'', w_{k+1}, \ldots, w_n \in K^n$ mamy:

$$f\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k'} + w_k'' \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k'} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k'' \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie 1

Dla każdego $n \geq 1$ istnieje dokładnie jedna funkcja $\det : M_n(K) \to K$, zwana wyznacznikiem, taka, że:

1. Dla $1 \leq k \leq n$ funkcja $\det$ jest jednorodna względem k-tego wiersza.
2. Dla $1 \leq k \leq n$ funkcja $\det$ jest addytywna względem k-tego wiersza.
3. $\det A = 0$, jeśli A ma identyczne dwa sąsiednie wiersze.
4. $\det I_n = 1$.

Uwaga: warunki te mają ważny geometryczny sens, który wyjaśni się na ostatnim wykładzie. Intuicja – dla $n = 2$ wyznacznik zachowuje się jak *skierowane pole*.

Twierdzenie 1

Dla każdego $n \geq 1$ istnieje dokładnie jedna funkcja $\det : M_n(K) \to K$, zwana wyznacznikiem, taka, że:

1. Dla $1 \leq k \leq n$ funkcja $\det$ jest jednorodna względem k-tego wiersza.
2. Dla $1 \leq k \leq n$ funkcja $\det$ jest addytywna względem k-tego wiersza.
3. $\det A = 0$, jeśli A ma identyczne dwa sąsiednie wiersze.
4. $\det I_n = 1$.

Kolejność postępowania.

- Znajdziemy kilka własności (potencjalnych) funkcji spełniających (1)-(4).
- Pokażemy, że istnieje co najwyżej jedna funkcja spełniająca (1)-(4).
- Wykażemy, że *każde* rozwinięcie Laplace'a zadaje funkcję spełniającą (1)-(4).

Uwaga 1

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Jeśli $C' \in M_n(K)$ powstaje z C przez zamianę dwóch sąsiednich wierszy, to

$$\det C = -\det C'.$$

Uwaga 1

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Jeśli $C' \in M_n(K)$ powstaje z C przez zamianę dwóch sąsiednich wierszy, to

$$\det C = -\det C'.$$

Dowód. Niech wiersze macierzy C mają postać $w_1, \ldots, w_n$. Niech C' powstaje z C przez zamianę wiersza k-tego i $k+1$-wszego. Na mocy własn. (2) i (3) funkcji det:

$$\det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k + w_{k+1} \\ w_k + w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k+1} \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k+1} \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Uwaga 1

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Jeśli $C' \in M_n(K)$ powstaje z C przez zamianę dwóch sąsiednich wierszy, to

$$\det C = -\det C'.$$

Dowód. Niech wiersze macierzy C mają postać $w_1, \ldots, w_n$. Niech C' powstaje z C przez zamianę wiersza k-tego i $k+1$-wszego. Na mocy własn. (2) i (3) funkcji det:

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k + w_{k+1} \\ w_k + w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{0} = \underbrace{\det\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{0} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k+1} \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{0} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\det C} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k+1} \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\det C'}$$

Uwaga 2

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Jeśli $C' \in M_n(K)$ ma dwa równe wiersze, to

$$\det C = 0.$$

Uwaga 2

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Jeśli $C' \in M_n(K)$ ma dwa równe wiersze, to

$$\det C = 0.$$

Dowód. Jeśli C ma dwa sąsiednie wiersze równe, to można za pomocą skończenie wielu operacji zamiany wierszy zamienić C w macierz C' o dwóch sąsiednich wierszach równych. Z Uwagi 1 mamy $\det C = \pm \det C' = 0$.

Uwaga 3

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech B będzie macierzą otrzymaną z macierzy A w wyniku dodania do wiersza l-tego wiersza k-tego pomnożonego przez $a \in K$. Wówczas: $\det B = \det A$.

Uwaga 3

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech B będzie macierzą otrzymaną z macierzy A w wyniku dodania do wiersza l-tego wiersza k-tego pomnożonego przez $a \in K$. Wówczas: $\det B = \det A$.

Schemat argumentu:

$$\det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l + aw_k \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ aw_k \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + a \cdot \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Uwaga 3

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech B będzie macierzą otrzymaną z macierzy A w wyniku dodania do wiersza l-tego wiersza k-tego pomnożonego przez $a \in K$. Wówczas: $\det B = \det A$.

Schemat argumentu:

$$\underbrace{\det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l + aw_k \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\det B} = \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ aw_k \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\det A} + a \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{0}$$

Wniosek 1

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech M będzie macierzą operacji elementarnej oraz $A \in M_n(K)$. Wówczas:

$$\det MA = \begin{cases} \det A, & \text{dla M dodającej do wiersza skalar razy inny wiersz,} \\ -\det A, & \text{dla M zamieniającej dwa wiersze miejscami,} \\ c \cdot \det A, & \text{dla M mnożącej pewien wiersz przez } c \neq 0. \end{cases}$$

W szczególności dla $A = I_n$ mamy

$$\det M = \begin{cases} 1, & \text{dla M dodającej do wiersza skalar razy inny wiersz,} \\ -1, & \text{dla M zamieniającej dwa wiersze miejscami,} \\ c, & \text{dla M mnożącej pewien wiersz przez } c \neq 0. \end{cases}$$

W każdym z opisanych przypadków zachodzi równość $\det MA = \det M \cdot \det A$.

Wniosek 2

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Dla każdej macierzy $A \in M_n(K)$ równoważne są warunki:

- $\det A \neq 0$,
- $r(A) = n$,
- A jest odwracalna.

Wniosek 2

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Dla każdej macierzy $A \in M_n(K)$ równoważne są warunki:

- $\det A \neq 0$,
- $r(A) = n$,
- A jest odwracalna.

Wniosek 3 - Twierdzenie Cauchy'ego

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech $A, B \in M_n(K)$. Wówczas:

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Wniosek 2

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Dla każdej macierzy $A \in M_n(K)$ równoważne są warunki:

- $\det A \neq 0$,
- $r(A) = n$,
- A jest odwracalna.

Wniosek 3 - Twierdzenie Cauchy'ego

Załóżmy, że funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia warunki (1)-(4). Niech $A, B \in M_n(K)$. Wówczas:

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Wniosek 4

Istnieje co najwyżej jedna funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełniająca warunki (1)-(4).

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:

$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:

$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$

- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:

$$\begin{aligned}
\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A &= \det M_1 \det M_2 M_3 \ldots M_s A = \\
&= \det M_1 \det M_2 \cdot \det M_3 \ldots M_s A = \\
&\ldots \\
&= \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.
\end{aligned}$$

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:
$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$
- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:
$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:

$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$

- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:

$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$

- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$ (bo $\det M_i$ są zawsze niezerowe).

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:
$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$
- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:
$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$
- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:

$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$

- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:

$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$

- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.
- W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$.

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:
$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$
- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:
$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$
- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.
- W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$, bo jeśli A' ma zerowy wiersz, to dodając do tego wiersza inny wiersz dostajemy macierz A'' o dwóch identycznych wierszach. A zatem $\det A'' = 0$, zgodnie z Uwagą 2. Ale też $\det A' = \det A''$ (A'' powstaje przez dodanie wiersza A' do innego), czyli $\det A' = 0$.

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:

$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$

- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:

$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$

- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.
- W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$.

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \dots, M_s$ takie, że:

$$A' = M_1 M_2 M_3 \dots M_s A.$$

- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:

$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \dots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \dots \det M_s \det A.$$

- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.
- W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$.
- Czyli $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A' = I$.

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:
$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$
- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:
$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$
- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.
- W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$.
- Czyli $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A' = I$.
- Ostatnio mówiliśmy, że $A' = I \Leftrightarrow A$ jest odwracalna.

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:

$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$

- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:

$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$

- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.
- W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$.
- Czyli $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A' = I$.
- Ostatnio mówiliśmy, że $A' = I \Leftrightarrow A$ jest odwracalna. Szkic dowodu:
    - Odwracalność A jest równoważna z tym, że A jest macierzą izomorfizmu (było).

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:
$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$
- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:
$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$
- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.
- W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$.
- Czyli $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A' = I$.
- Ostatnio mówiliśmy, że $A' = I \Leftrightarrow A$ jest odwracalna. Szkic dowodu:
    - Odwracalność A jest równoważna z tym, że A jest macierzą izomorfizmu (było).
    - Równoważnie: wymiar obrazu przekształcenia o macierzy A to n.

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:
$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$
- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:
$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$
- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.
- W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$.
- Czyli $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A' = I$.
- Ostatnio mówiliśmy, że $A' = I \Leftrightarrow A$ jest odwracalna. Szkic dowodu:
  - Odwracalność A jest równoważna z tym, że A jest macierzą izomorfizmu (było).
  - Równoważnie: wymiar obrazu przekształcenia o macierzy A to n.
  - Równoważnie: $r(A) = n$.

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:

$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$

- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:

$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$

- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.
- W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$.
- Czyli $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A' = I$.
- Ostatnio mówiliśmy, że $A' = I \Leftrightarrow A$ jest odwracalna. Szkic dowodu:
    - Odwracalność A jest równoważna z tym, że A jest macierzą izomorfizmu (było).
    - Równoważnie: wymiar obrazu przekształcenia o macierzy A to n.
    - Równoważnie: $r(A) = n$.
    - Równoważnie: macierz $A \in M_n(K)$ po schodkowaniu nie ma wierszy zerowych.

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:
$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$
- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:
$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$
- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.
- W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$.
- Czyli $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A' = I$.
- Ostatnio mówiliśmy, że $A' = I \Leftrightarrow A$ jest odwracalna. Szkic dowodu:
    - Odwracalność A jest równoważna z tym, że A jest macierzą izomorfizmu (było).
    - Równoważnie: wymiar obrazu przekształcenia o macierzy A to n.
    - Równoważnie: $r(A) = n$.
    - Równoważnie: macierz $A \in M_n(K)$ po schodkowaniu nie ma wierszy zerowych.
    - Równoważnie: $A' = I$ (ciągle korzystamy z tego, że $A \in M_n(K)$).

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:
$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$
- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:
$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$
- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.
- W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$.
- Czyli $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A' = I \Leftrightarrow A$ jest odwracalna.

Dowód Wniosku 2.

- Przypomnienie: jeśli A' jest postacią schodkową zredukowaną macierzy A, to istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ takie, że:
$$A' = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A.$$
- Stosując wiele razy Wniosek 1 (ostatnie zdanie) mamy:
$$\det A' = \det M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A = \det M_1 \det M_2 \det M_3 \ldots \det M_s \det A.$$
- Wniosek: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$.
- Skoro A jest kwadratowa, to $A' = I$ lub A' ma zerowy wiersz.
- W pierwszym przypadku $\det A' = 1$, a w drugim: $\det A' = 0$.
- Czyli $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A' = I \Leftrightarrow A$ jest odwracalna.
- Pokazaliśmy Wniosek 2.

Dowód Wniosku 3.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$. Inaczej na mocy Wniosku 2 macierze A, B byłyby odwracalne, a z nimi i AB, bo
$$(AB) \cdot B^{-1}A^{-1} = I.$$

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
   - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
    - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
    - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
    - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
   - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB \neq 0$.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
   - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB \neq 0$.
   - Jeśli $A = M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $B = M(\psi)_{st}^{st}$, gdzie $\phi, \psi : K^n \to K^n$, to $AB = M(\phi \circ \psi)_{st}^{st}$.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
   - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB \neq 0$.
   - Jeśli $A = M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $B = M(\psi)_{st}^{st}$, gdzie $\phi, \psi : K^n \to K^n$, to $AB = M(\phi \circ \psi)_{st}^{st}$.
   - Skoro AB jest odwracalna, to $\phi \circ \psi$ to izomorfizm.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
    - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
    - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
    - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.
    - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB \neq 0$.
    - Jeśli $A = M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $B = M(\psi)_{st}^{st}$, gdzie $\phi, \psi : K^n \to K^n$, to $AB = M(\phi \circ \psi)_{st}^{st}$.
    - Skoro AB jest odwracalna, to $\phi \circ \psi$ to izomorfizm.
    - Ale $\ker(\psi) \subseteq \ker(\phi \circ \psi)$ oraz $\operatorname{im}(\phi) \supseteq \operatorname{im}(\phi \circ \psi)$.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
   - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB \neq 0$.
   - Jeśli $A = M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $B = M(\psi)_{st}^{st}$, gdzie $\phi, \psi : K^n \to K^n$, to $AB = M(\phi \circ \psi)_{st}^{st}$.
   - Skoro AB jest odwracalna, to $\phi \circ \psi$ to izomorfizm.
   - Ale $\ker(\psi) \subseteq \ker(\phi \circ \psi)$ oraz $\operatorname{im}(\phi) \supseteq \operatorname{im}(\phi \circ \psi)$.
   - Zatem $\ker(\psi) \subseteq \ker(\phi \circ \psi) = 0$ oraz $\operatorname{im}(\phi) \supseteq \operatorname{im}(\phi \circ \psi) = K^n$.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
   - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB \neq 0$.
   - Jeśli $A = M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $B = M(\psi)_{st}^{st}$, gdzie $\phi, \psi : K^n \to K^n$, to $AB = M(\phi \circ \psi)_{st}^{st}$.
   - Skoro AB jest odwracalna, to $\phi \circ \psi$ to izomorfizm.
   - Ale $\ker(\psi) \subseteq \ker(\phi \circ \psi)$ oraz $\mathrm{im}(\phi) \supseteq \mathrm{im}(\phi \circ \psi)$.
   - Zatem $\ker(\psi) \subseteq \ker(\phi \circ \psi) = 0$ oraz $\mathrm{im}(\phi) \supseteq \mathrm{im}(\phi \circ \psi) = K^n$.
   - Zatem ψ jest mono oraz ϕ jest epi.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
   - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB \neq 0$.
   - Jeśli $A = M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $B = M(\psi)_{st}^{st}$, gdzie $\phi, \psi : K^n \to K^n$, to $AB = M(\phi \circ \psi)_{st}^{st}$.
   - Skoro AB jest odwracalna, to $\phi \circ \psi$ to izomorfizm.
   - Ale $\ker(\psi) \subseteq \ker(\phi \circ \psi)$ oraz $\operatorname{im}(\phi) \supseteq \operatorname{im}(\phi \circ \psi)$.
   - Zatem $\ker(\psi) \subseteq \ker(\phi \circ \psi) = 0$ oraz $\operatorname{im}(\phi) \supseteq \operatorname{im}(\phi \circ \psi) = K^n$.
   - Zatem ψ jest mono oraz ϕ jest epi.
   - Ale skoro $\phi, \psi : K^n \to K^n$, to są izomorfizmami.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
   - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB \neq 0$.
   - Jeśli $A = M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $B = M(\psi)_{st}^{st}$, gdzie $\phi, \psi : K^n \to K^n$, to $AB = M(\phi \circ \psi)_{st}^{st}$.
   - Skoro AB jest odwracalna, to $\phi \circ \psi$ to izomorfizm.
   - Ale $\ker(\psi) \subseteq \ker(\phi \circ \psi)$ oraz $\operatorname{im}(\phi) \supseteq \operatorname{im}(\phi \circ \psi)$.
   - Zatem $\ker(\psi) \subseteq \ker(\phi \circ \psi) = 0$ oraz $\operatorname{im}(\phi) \supseteq \operatorname{im}(\phi \circ \psi) = K^n$.
   - Zatem ψ jest mono oraz ϕ jest epi.
   - Ale skoro $\phi, \psi : K^n \to K^n$, to są izomorfizmami.
   - Zatem $\det A \neq 0$ oraz $\det B \neq 0$.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
   - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB \neq 0$.
   - Zatem $\det A \neq 0$ oraz $\det B \neq 0$.
   - Zatem postacią schodkową zredukowaną A oraz B jest I.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
   - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB \neq 0$.
   - Zatem $\det A \neq 0$ oraz $\det B \neq 0$.
   - Zatem postacią schodkową zredukowaną A oraz B jest I.
   - Innymi słowy istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ oraz $N_1, \ldots, N_t$ takie, że $I = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A, \quad I = N_1 N_2 N_3 \ldots N_t B$.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
   - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB \neq 0$.
   - Zatem $\det A \neq 0$ oraz $\det B \neq 0$.
   - Zatem postacią schodkową zredukowaną A oraz B jest I.
   - Innymi słowy istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \dots, M_s$ oraz $N_1, \dots, N_t$ takie, że $I = M_1 M_2 M_3 \dots M_s A, \quad I = N_1 N_2 N_3 \dots N_t B$.
   - Zatem $A = M_s^{-1} M_{s-1}^{-1} \dots M_1^{-1}, \quad B = N_t^{-1} N_{t-1}^{-1} \dots N_1^{-1}$.

Dowód Wniosku 3.

1. Załóżmy, że AB nie jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB = 0$.
   - Wówczas także $\det A = 0$ lub $\det B = 0$.
   - Zatem w tym przypadku $0 = \det AB = \det A \det B$.
2. Załóżmy, że AB jest odwracalna.
   - Zgodnie z Wnioskiem 2 mamy $\det AB \neq 0$.
   - Zatem $\det A \neq 0$ oraz $\det B \neq 0$.
   - Zatem postacią schodkową zredukowaną A oraz B jest I.
   - Innymi słowy istnieją macierze operacji elementarnych $M_1, \ldots, M_s$ oraz $N_1, \ldots, N_t$ takie, że $I = M_1 M_2 M_3 \ldots M_s A, \quad I = N_1 N_2 N_3 \ldots N_t B$.
   - Zatem $A = M_s^{-1} M_{s-1}^{-1} \ldots M_1^{-1}, \quad B = N_t^{-1} N_{t-1}^{-1} \ldots N_1^{-1}$.
   - Ale M_i^{-1} oraz N_j^{-1} to macierze operacji elementarnych, więc z Wniosku 1:

$$\begin{aligned}\det AB &= \det M_s^{-1} M_{s-1}^{-1} \ldots M_1^{-1} N_t^{-1} N_{t-1}^{-1} \ldots N_1^{-1} = \\ &= \det M_s^{-1} \det M_{s-1}^{-1} \ldots \det M_1^{-1} \det N_t^{-1} \det N_{t-1}^{-1} \ldots \det N_1^{-1} = \\ &= \det M_s^{-1} M_{s-1}^{-1} \ldots M_1^{-1} \det N_t^{-1} N_{t-1}^{-1} \ldots N_1^{-1} = \det A \det B.\end{aligned}$$

Dowód Wniosku 4.

Dowód Wniosku 4.

- Pokażemy, że jeśli istnieje funkcja $\det$ spełniająca (1)-(4), to ma jednoznaczną wartość dla każdego $A \in M_n(K)$.

Dowód Wniosku 4.

- Pokażemy, że jeśli istnieje funkcja $\det$ spełniająca (1)-(4), to ma jednoznaczną wartość dla każdego $A \in M_n(K)$.
- Jeśli A nie jest odwracalna, to $\det A = 0$.

Dowód Wniosku 4.

- Pokażemy, że jeśli istnieje funkcja $\det$ spełniająca (1)-(4), to ma jednoznaczną wartość dla każdego $A \in M_n(K)$.
- Jeśli A nie jest odwracalna, to $\det A = 0$.
- Jeśli A jest odwracalna to algorytm Gaussa podaje jednoznaczny, najkrótszy możliwy ciąg operacji elementarnych pozwalających na sprowadzenie A do postaci zredukowanej I. Niech macierze tych operacji to $M_1, \dots, M_s$.

Dowód Wniosku 4.

- Pokażemy, że jeśli istnieje funkcja $\det$ spełniająca (1)-(4), to ma jednoznaczną wartość dla każdego $A \in M_n(K)$.
- Jeśli A nie jest odwracalna, to $\det A = 0$.
- Jeśli A jest odwracalna to algorytm Gaussa podaje jednoznaczny, najkrótszy możliwy ciąg operacji elementarnych pozwalających na sprowadzenie A do postaci zredukowanej I. Niech macierze tych operacji to $M_1, \ldots, M_s$.
- Na mocy Wniosku 3

$$1 = \det I = \det M_s \det M_{s-1} \ldots \det M_1 \det A.$$

Dowód Wniosku 4.

- Pokażemy, że jeśli istnieje funkcja $\det$ spełniająca (1)-(4), to ma jednoznaczną wartość dla każdego $A \in M_n(K)$.
- Jeśli A nie jest odwracalna, to $\det A = 0$.
- Jeśli A jest odwracalna to algorytm Gaussa podaje jednoznaczny, najkrótszy możliwy ciąg operacji elementarnych pozwalających na sprowadzenie A do postaci zredukowanej I. Niech macierze tych operacji to $M_1, \dots, M_s$.
- Na mocy Wniosku 3

$$1 = \det I = \det M_s \det M_{s-1} \dots \det M_1 \det A.$$

- Zatem gdy A jest odwracalna, to

$$\det A = (\det M_s \det M_{s-1} \dots \det M_1)^{-1},$$

gdzie $M_1, \dots, M_s$ jest jednoznacznie wyznaczonym ciągiem macierzy operacji elementarnych. Skoro znamy $\det M_i$, to $\det A$ jest wyznaczona jednoznacznie.

Wniosek 5

Jeśli funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia (1)-(4), to dla każdej $A \in M_n(K)$ mamy $\det A = \det A^T$.

Wniosek 5

Jeśli funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia (1)-(4), to dla każdej $A \in M_n(K)$ mamy $\det A = \det A^T$.

Dowód:

- Korzystamy z faktu, że $r(A) = r(A^T)$. Jeśli $r(A) < n$, to $r(A^T)$, czyli obie macierze nie są odwracalne i ich wyznaczniki są równe 0.

Wniosek 5

Jeśli funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia (1)-(4), to dla każdej $A \in M_n(K)$ mamy $\det A = \det A^T$.

Dowód:

- Korzystamy z faktu, że $r(A) = r(A^T)$. Jeśli $r(A) < n$, to $r(A^T)$, czyli obie macierze nie są odwracalne i ich wyznaczniki są równe 0.
- Jeśli $r(A) = n$, to A rozkłada się na iloczyn macierzy operacji elementarnych

$$A = M_1 M_2 \dots M_s.$$

Wniosek 5

Jeśli funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia (1)-(4), to dla każdej $A \in M_n(K)$ mamy $\det A = \det A^T$.

Dowód:

- Korzystamy z faktu, że $r(A) = r(A^T)$. Jeśli $r(A) < n$, to $r(A^T)$, czyli obie macierze nie są odwracalne i ich wyznaczniki są równe 0.
- Jeśli $r(A) = n$, to A rozkłada się na iloczyn macierzy operacji elementarnych
$$A = M_1 M_2 \ldots M_s.$$
- Zatem zgodnie ze wzorem $(XY)^T = Y^T X^T$ mamy: $A^T = M_s^T M_{s-1}^T \ldots M_1^T$.

Wniosek 5

Jeśli funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia (1)-(4), to dla każdej $A \in M_n(K)$ mamy $\det A = \det A^T$.

Dowód:

- Korzystamy z faktu, że $r(A) = r(A^T)$. Jeśli $r(A) < n$, to $r(A^T)$, czyli obie macierze nie są odwracalne i ich wyznaczniki są równe 0.
- Jeśli $r(A) = n$, to A rozkłada się na iloczyn macierzy operacji elementarnych
$$A = M_1 M_2 \dots M_s.$$
- Zatem zgodnie ze wzorem $(XY)^T = Y^T X^T$ mamy: $A^T = M_s^T M_{s-1}^T \dots M_1^T$.
- Łatwo sprawdzić, że dla każdej macierzy operacji elementarnej M mamy $\det M = \det M^T$.

Wniosek 5

Jeśli funkcja $\det : M_n(K) \to K$ spełnia (1)-(4), to dla każdej $A \in M_n(K)$ mamy $\det A = \det A^T$.

Dowód:

- Korzystamy z faktu, że $r(A) = r(A^T)$. Jeśli $r(A) < n$, to $r(A^T)$, czyli obie macierze nie są odwracalne i ich wyznaczniki są równe 0.
- Jeśli $r(A) = n$, to A rozkłada się na iloczyn macierzy operacji elementarnych
$$A = M_1 M_2 \dots M_s.$$
- Zatem zgodnie ze wzorem $(XY)^T = Y^T X^T$ mamy: $A^T = M_s^T M_{s-1}^T \dots M_1^T$.
- Łatwo sprawdzić, że dla każdej macierzy operacji elementarnej M mamy $\det M = \det M^T$.
- Zatem z twierdzenia Cauchy'ego (Wniosek 3):
$$\det A = \det M_1 \det M_2 \dots \det M_s = \det M_s^T \det M_{s-1}^T \dots \det M_1^T = \det A.$$

Dowód Twierdzenia o istnieniu wyznacznika.

Jednorodność zdefiniowanej na początku funkcji det. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Mamy:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Niech B powstaje z A przez pomnożenie pewnego wiersza przez $c \in K$. Chcemy pokazać:

$$\det B = c \det A.$$

Dowód Twierdzenia o istnieniu wyznacznika.

Jednorodność zdefiniowanej na początku funkcji det. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$.

- Przypadek 1. Pierwszy wiersz A mnożymy przez $c \in K$ dostając B. Mamy:

$$\det B = \det \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Zatem $B_{1j} = A_{1j}$, dla $1 \leq j \leq n$, czyli $\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} ca_{1j} \det A_{1j} = c \det A$.

Dowód Twierdzenia o istnieniu wyznacznika.

Jednorodność zdefiniowanej na początku funkcji det. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$.

- Przypadek 2. Inny niż pierwszy wiersz A mnożymy przez $c \in K$ dostając B. Mamy np.:

$$\det B = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \dots & ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Każda z macierzy B_{1j} powstaje z A_{1j} przez pomnożenie pewnego wiersza przez stałą. Z założenia indukcyjnego $\det B_{1j} = c \det A_{1j}$. Zatem:

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det B_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} c \det A_{1j} = c \det A.$$

Dowód Twierdzenia o istnieniu wyznacznika.

Addytywność zdefiniowanej na początku funkcji $\det$. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Mamy:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Chcemy pokazać:

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} + y_{k1} & \dots & x_{kn} + y_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{Z} = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \dots & x_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{X} + \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k1} & \dots & y_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{Y}.$$

Dowód Twierdzenia o istnieniu wyznacznika.

Addytywność zdefiniowanej na początku funkcji det. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Mamy:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.$$

- Przypadek 1. $k = 1$. Wówczas $X_{1j} = Y_{1j} = Z_{1j}$, bo macierze X, Y, Z różnią się tylko pierwszymi wierszami. Zatem:

$$\begin{aligned}
\det Z &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (x_{kj} + y_{kj}) \det Z_{1j} = \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (x_{kj}) \det X_{1j} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (y_{kj}) \det Y_{1j} = \\
&= \det X + \det Y.
\end{aligned}$$

Dowód Twierdzenia o istnieniu wyznacznika.

Addytywność zdefiniowanej na początku funkcji $\det$. Weźmy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Mamy:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.$$

- Przypadek 2. $k \neq 1$. Wówczas z założenia indukcyjnego $\det Z_{1j} = \det X_{1j} + \det Y_{1j}$. Zatem:

$$\det Z = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det Z_{1j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det X_{1j} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det Y_{1j} = \det X + \det Y.$$

Dowód Twierdzenia o istnieniu wyznacznika.

- Podobnie jak dla (1), (2) wykazuje się, że rozważana funkcja spełnia (3).
- Fakt, że $\det(I_n) = 1$ jest prostym ćwiczeniem.
- Zatem wyznacznik określony przez rozwinięciem Laplace'a względem pierwszego wiersza jest funkcją z $M_n(K)$ do K, spełniającą (1)-(4), co kończy dowód Twierdzenia 1.

Dowód Twierdzenia o istnieniu wyznacznika.

- Podobnie jak dla (1), (2) wykazuje się, że rozważana funkcja spełnia (3).
- Fakt, że $\det(I_n) = 1$ jest prostym ćwiczeniem.
- Zatem wyznacznik określony przez rozwinięciem Laplace'a względem pierwszego wiersza jest funkcją z $M_n(K)$ do K, spełniającą (1)-(4), co kończy dowód Twierdzenia 1.

* * *

UWAGA

Powyższe dowody pozostają bez istotnych zmian, gdyby zdefiniować wyznacznik jako rozwinięcie Laplace'a względem dowolnego wiersza. Z jednoznaczności funkcji $\det$ dostajemy wniosek...

Wniosek 6

Dla każdego $1 \leq i \leq n$ oraz macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi równość:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Wniosek 6

Dla każdego $1 \leq i \leq n$ oraz macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi równość:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Możemy też rozważać rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny zdefiniowane rekurencyjnie:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Wniosek 6

Dla każdego $1 \leq i \leq n$ oraz macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ zachodzi równość:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Możemy też rozważać rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny zdefiniowane rekurencyjnie:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Z Wniosku 5 ($\det A = \det A^T$) widzimy, że rozwinięcie Laplace'a macierzy A względem j-tej kolumny to to samo, co rozwinięcie Laplace'a macierzy A^T względem j-tego wiersza. Zatem dla każdego $1 \leq j \leq n$ mamy:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Definicja

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Zbiór wyrazów $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ nazywamy **przekątną** lub **diagonalą** macierzy A. Powiemy, że A jest:

- **górnotrójkątna**, jeśli $a_{ij} = 0$, dla $i > j$
  (czyli *pod przekątną* macierzy A stoją wyrazy zerowe),
- **dolnotrójkątna**, jeśli $a_{ij} = 0$, dla $j > i$
  (czyli *nad przekątną* macierzy A stoją wyrazy zerowe).

Definicja

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Zbiór wyrazów $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ nazywamy **przekątną** lub **diagonalą** macierzy A. Powiemy, że A jest:

- **górnotrójkątna**, jeśli $a_{ij} = 0$, dla $i > j$
  (czyli *pod przekątną* macierzy A stoją wyrazy zerowe),
- **dolnotrójkątna**, jeśli $a_{ij} = 0$, dla $j > i$
  (czyli *nad przekątną* macierzy A stoją wyrazy zerowe).

Fakt

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ będzie macierzą dolnotrójkątną lub górnotrójkątną. Wówczas $\det A$ równy jest iloczynowi elementów na przekątnej A.

Fakt

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ będzie macierzą dolnotrójkątną lub górnotrójkątną. Wówczas $\det A$ równy jest iloczynowi elementów na przekątnej A.

Dowód:

Fakt

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ będzie macierzą dolnotrójkątną lub górnotrójkątną. Wówczas $\det A$ równy jest iloczynowi elementów na przekątnej A.

Dowód:

- Jeśli A jest dolnotrójkątna, $a_{12} = \ldots = a_{1n}$. Zatem korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem pierwszego wiersza mamy:

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11}.$$

  Ale A_{11} jest również dolnotrójkątna i jej przekątna składa się z $\{a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$. Zatem teza wynika z założenia indukcyjnego.

Fakt

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ będzie macierzą dolnotrójkątną lub górnotrójkątną. Wówczas $\det A$ równy jest iloczynowi elementów na przekątnej A.

Dowód:

- Jeśli A jest dolnotrójkątna, $a_{12} = \ldots = a_{1n}$. Zatem korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem pierwszego wiersza mamy:

  $$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11}.$$

  Ale A_{11} jest również dolnotrójkątna i jej przekątna składa się z $\{a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$. Zatem teza wynika z założenia indukcyjnego.

- Jeśli A jest górnotrójkątna, to A^T jest dolnotrójkątna (alternatywnie: rozwinięcie Laplace'a względem pierwszej kolumny).

Fakt

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ będzie macierzą dolnotrójkątną lub górnotrójkątną. Wówczas $\det A$ równy jest iloczynowi elementów na przekątnej A.

Wniosek: skoro dowolna postać schodkowa A' macierzy A jest zawsze górnotrójkątna, to obliczenie $\det A$ może być dokonane przez znalezienie ciągu macierzy

$$A, A_1, A_2, \ldots, A_s, A',$$

gdzie każda kolejna macierz powstaje z poprzedniej przez wykonanie pojedynczej operacji elementarnej. Wiadomo bowiem w jaki sposób wyznacznik każdej kolejnej macierzy zależy od wyznacznika poprzedniej, zaś $\det A'$ to iloczyn elementów na przekątnej (krótko mówiąc prosta modyfikacja algorytmu Gaussa daje algorytm obliczania wyznacznika bez konieczności stosowania rekurencji).