# Geometria z Algebrą Liniową I

Arkadiusz Męcel

**WYKŁAD 10, 22.12.2020 r.**

Na ostatnim wykładzie:

- przestrzenie izomorficzne,
- przestrzeń przekształceń liniowych $L(V, W)$,
- składanie przekształceń liniowych,
- definicja macierzy przekształcenia liniowego w bazach,
- operacja mnożenia macierzy,
- mnożenie macierzy przekształceń, a zmiana bazy.

### Twierdzenie

Niech $V, W$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $K$, niech $\mathcal{A}$ będzie bazą $V$ oraz niech $\mathcal{B}$ będzie bazą $W$, przy czym $n = \dim V$, $m = \dim W$. Wówczas przyporządkowanie każdemu przekształceniu liniowemu $\phi \in L(V, W)$ jego macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ zadaje izomorfizm przestrzeni liniowych:

$$L(V, W) \xrightarrow{\Lambda_{\mathcal{A},\mathcal{B}}} M_{m\times n}(K),$$

## Twierdzenie

Niech $V, W$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $K$, niech $\mathcal{A}$ będzie bazą $V$ oraz niech $\mathcal{B}$ będzie bazą $W$, przy czym $n = \dim V$, $m = \dim W$. Wówczas przyporządkowanie każdemu przekształceniu liniowemu $\phi \in L(V, W)$ jego macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ zadaje izomorfizm przestrzeni liniowych:

$$L(V, W) \xrightarrow{\Lambda_{\mathcal{A},\mathcal{B}}} M_{m\times n}(K),$$

*Szkic dowodu.*

- $\Lambda_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ jest przekształceniem liniowym, bowiem dla $\phi, \psi \in L(V, W)$:

  $$M(\phi + \psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} + M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}},$$

  oraz oczywiście dla każdego $c \in K$ mamy $M(c\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = cM(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

### Twierdzenie

Niech $V$, $W$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $K$, niech $\mathcal{A}$ będzie bazą $V$ oraz niech $\mathcal{B}$ będzie bazą $W$, przy czym $n = \dim V$, $m = \dim W$. Wówczas przyporządkowanie każdemu przekształceniu liniowemu $\phi \in L(V, W)$ jego macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ zadaje izomorfizm przestrzeni liniowych:

$$L(V, W) \xrightarrow{\Lambda_{\mathcal{A},\mathcal{B}}} M_{m\times n}(K),$$

*Szkic dowodu.*

- $\Lambda_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ jest przekształceniem liniowym, bowiem dla $\phi, \psi \in L(V, W)$:
$$M(\phi + \psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} + M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}},$$
oraz oczywiście dla każdego $c \in K$ mamy $M(c\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = cM(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.
- Każde przekształcenie liniowe $L(V, W)$ jest wyznaczone **jednoznacznie** przez swoje wartości na bazie, na przykład na $\mathcal{A}$. A zatem $\Lambda_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ jest bijekcją.

**Uwaga.** Niech $\phi : K^n \to K^m$ będzie przekształceniem liniowym postaci:

$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n,\ \ldots\ ,\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$.

Wówczas

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Współrzędne wektora $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ w bazie standardowej to kolejne wyrazy macierzy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

## Uwaga

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

- $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni $V$,
- $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ niech będzie bazą przestrzeni $W$.

Jeśli

- $a_1, \ldots, a_n$ są współrzędnymi wektora $\alpha$ w bazie $\mathcal{A}$,
- $b_1, \ldots, b_m$ są współrzędnymi wektora $\phi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$

to:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Dowód.

- Niech $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = [a_{ij}]$, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Dowód.

- Niech $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = [a_{ij}]$, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
- Z definicji macierzy przekształcenia mamy, dla $1 \leq j \leq m$:

$$\phi(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \ldots + a_{mj}\beta_m.$$

Dowód.

- Niech $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = [a_{ij}]$, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
- Z definicji macierzy przekształcenia mamy, dla $1 \leq j \leq m$:

$$\phi(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \ldots + a_{mj}\beta_m.$$

- Stąd:

$$\phi(\alpha) = \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n)$$

Dowód.

- Niech $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = [a_{ij}]$, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
- Z definicji macierzy przekształcenia mamy, dla $1 \leq j \leq m$:

$$\phi(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \ldots + a_{mj}\beta_m.$$

- Stąd:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\ &= a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_n\phi(\alpha_n) \end{aligned}$$

Dowód.

- Niech $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = [a_{ij}]$, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
- Z definicji macierzy przekształcenia mamy, dla $1 \leq j \leq m$:

$$\phi(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \ldots + a_{mj}\beta_m.$$

- Stąd:

$$\begin{aligned}\phi(\alpha) &= \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\ &= a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_n\phi(\alpha_n) = \\ &= a_1(a_{11}\beta_1 + \ldots + a_{m1}\beta_m) + \ldots + a_n(a_{1n}\beta_1 + \ldots + a_{mn}\beta_m) =\end{aligned}$$

Dowód.

- Niech $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = [a_{ij}]$, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
- Z definicji macierzy przekształcenia mamy, dla $1 \leq j \leq m$:

$$\phi(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \ldots + a_{mj}\beta_m.$$

- Stąd:

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha) &= \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\
&= a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_n\phi(\alpha_n) = \\
&= a_1(a_{11}\beta_1 + \ldots + a_{m1}\beta_m) + \ldots + a_n(a_{1n}\beta_1 + \ldots + a_{mn}\beta_m) = \\
&= \sum_{j=1}^{m}(a_{1j}a_j)\beta_1 + \ldots + \sum_{j=1}^{m}(a_{nj}a_j)\beta_n
\end{aligned}$$

Dowód.

- Niech $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = [a_{ij}]$, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
- Z definicji macierzy przekształcenia mamy, dla $1 \leq j \leq m$:

$$\phi(\alpha_j) = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \ldots + a_{mj}\beta_m.$$

- Stąd:

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha) &= \phi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\
&= a_1\phi(\alpha_1) + \ldots + a_n\phi(\alpha_n) = \\
&= a_1(a_{11}\beta_1 + \ldots + a_{m1}\beta_m) + \ldots + a_n(a_{1n}\beta_1 + \ldots + a_{mn}\beta_m) = \\
&= \sum_{j=1}^{m}(a_{1j}a_j)\beta_1 + \ldots + \sum_{j=1}^{m}(a_{nj}a_j)\beta_n
\end{aligned}$$

- Ale $\phi(\alpha) = b_1\beta_1 + \ldots + b_m\beta_m$. Stąd dla każdego $i$ mamy:

$$b_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}a_j.$$

### Definicja

Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni $V$. Macierz $C = M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ nazywamy **macierzą zamiany (transformacji) współrzędnych** z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.

**Definicja**

Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni $V$. Macierz $C = M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ nazywamy **macierzą zamiany (transformacji) współrzędnych** z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.

Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są bazami przestrzeni $V$ i

$$C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}},$$

gdzie $\mathrm{id} = \mathrm{id}_V$ jest identycznością na $V$, to dla każdego $\alpha \in V$: jeśli $a_1, \ldots, a_n$ są współrzędnymi $\alpha$ w bazie $\mathcal{A}$, zaś $b_1, \ldots, b_n$ są jego współrzędnymi w bazie $\mathcal{B}$, to:

$$C \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

### Twierdzenie

Jeśli $V, W, Z$ są przestrzeniami liniowymi nad $K$ z bazami odpowiednio $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, oraz $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ są przekształceniami liniowymi, to:

$$M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

### Twierdzenie

Jeśli $V, W, Z$ są przestrzeniami liniowymi nad $K$ z bazami odpowiednio $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, oraz $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ są przekształceniami liniowymi, to:

$$M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Dowód: analogiczny jak dowód wcześniejszej uwagi (patrz skrypt).

### Kluczowy wniosek

Jeśli $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ są bazami przestrzeni $V$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ są bazami przestrzeni $W$, to:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}_W)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}.$$

## Kluczowy wniosek

Jeśli $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ są bazami przestrzeni $V$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ są bazami przestrzeni $W$, to:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}_W)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}.$$

Dowód.

- Skoro $\phi : V \to W$, to $\phi = \mathrm{id}_W \circ \phi \circ \mathrm{id}_V$.

## Kluczowy wniosek

Jeśli $\phi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ są bazami przestrzeni $V$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ są bazami przestrzeni $W$, to:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}_W)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}.$$

Dowód.

- Skoro $\phi : V \to W$, to $\phi = \mathrm{id}_W \circ \phi \circ \mathrm{id}_V$.
- Zatem z twierdzenia wyżej mamy:
$$M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}_W \circ \phi \circ \mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = M(\mathrm{id}_W)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id}_V)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}.$$

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ xd & xe & xf \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d+a & e+b & f+c \end{bmatrix},$$

Przykład:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & xb & c \\ d & xe & f \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c+a \\ d & e & f+d \end{bmatrix}.$$

## Definicja 2.

Niech $n, i, j$ będą liczbami naturalnymi spełniającymi $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ i niech $x, y$ będą elementami ciała $K$, przy czym $y \neq 0$. Definiujemy następujące macierze

$$E_{ij}^n(x),\ T_{ij}^n,\ I_i^n(y)$$

należące do $M_{n\times n}(K)$, nazywane **macierzami operacji elementarnych.**

- $E_{ij}^n(x) = [a_{st}] \in M_{n\times n}(K)$, gdzie

$$a_{st} = \begin{cases} x, & \text{gdy } s = i, t = j \\ 1, & \text{gdy } s = t \\ 0, & \text{w p.p.,} \end{cases}$$

### Definicja 2.

Niech $n, i, j$ będą liczbami naturalnymi spełniającymi $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ i niech $x, y$ będą elementami ciała $K$, przy czym $y \neq 0$. Definiujemy następujące macierze

$$E_{ij}^n(x),\ T_{ij}^n,\ I_i^n(y)$$

należące do $M_{n\times n}(K)$, nazywane **macierzami operacji elementarnych.**

- $T_{ij}^n = [a_{st}] \in M_{n\times n}(K)$, gdzie

$$a_{st} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } s = t \neq i, j \\ 1, & \text{gdy } s = i, t = j \text{ lub } s = j, t = i \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

## Definicja 2.

Niech $n, i, j$ będą liczbami naturalnymi spełniającymi $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ i niech $x, y$ będą elementami ciała $K$, przy czym $y \neq 0$. Definiujemy następujące macierze

$$E_{ij}^{n}(x), T_{ij}^{n}, I_{i}^{n}(y)$$

należące do $M_{n\times n}(K)$, nazywane **macierzami operacji elementarnych.**

- $I_{i}^{n}(y) = [a_{st}] \in M_{n\times n}(K)$, gdzie

$$a_{st} = \begin{cases} y, & \text{gdy } s = t = i \\ 1, & \text{gdy } s = t \neq i \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} .$$

## Uwaga

Dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ zachodzi:

- $E_{ij}^m(x) \cdot A$ – macierz powstała z $A$ przez dodanie do $i$-tego wiersza $j$-tego wiersza pomnożonego przez $x$,
- $A \cdot E_{ij}^n(x)$ – macierz powstała z $A$ przez dodanie do $j$-tej kolumny $i$-tej kolumny pomnożonej przez $x$.

Przykłady:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d + xa & e + xb & f + xc \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c + xa \\ d & e & f + xd \end{bmatrix}.$$

## Uwaga

Dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ zachodzi:

- $T^m_{ij} \cdot A$ – macierz powstała z $A$ przez przestawienie $i$-tego i $j$-tego wiersza,
- $A \cdot T^n_{ij}$ – macierz powstała z $A$ przez przestawienie $i$-tej i $j$-tej kolumny.

Przykłady:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \end{bmatrix}.$$

## Uwaga

Dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ zachodzi:

- $I_i^m(y) \cdot A$ – macierz powstała z $A$ przez pomnożenie $i$-tego wiersza przez $y$,
- $A \cdot I_i^n(y)$ – macierz powstała z $A$ przez pomnożenie $i$-tej kolumny przez $y$.

Przykłady:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ yd & ye & yf \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & yb & c \\ d & ye & f \end{bmatrix}.$$

### Fakt

Dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ istnieje

- macierz $P \in M_{m\times m}(K)$, będąca iloczynem macierzy typu $E_{ij}(x)$, $T_{ij}^{m}$, że macierz $PA$ jest schodkowa,
- macierz $Q \in M_{m\times m}(K)$, będąca iloczynem macierzy typu $E_{ij}(x)$, $T_{ij}$, $I_i(y)$, że macierz $QA$ jest schodkowa zredukowana.

## Fakt

Dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ istnieje

- macierz $P \in M_{m\times m}(K)$, będąca iloczynem macierzy typu $E_{ij}(x)$, $T_{ij}^{m}$, że macierz $PA$ jest schodkowa,
- macierz $Q \in M_{m\times m}(K)$, będąca iloczynem macierzy typu $E_{ij}(x)$, $T_{ij}$, $I_i(y)$, że macierz $QA$ jest schodkowa zredukowana.

Przykład: dla macierzy $A$ postaci

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

macierz $Q$ to:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Definicja

Powiemy, że macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ jest **odwrotna** do macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$, jeśli

$$AB = BA = I_n.$$

Mówimy wtedy, że $A$ jest **odwracalna**. Macierz odwrotną do macierzy $A$ oznaczamy, o ile istnieje, jako $A^{-1}$.

## Definicja

Powiemy, że macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ jest **odwrotna** do macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$, jeśli

$$AB = BA = I_n.$$

Mówimy wtedy, że $A$ jest **odwracalna.** Macierz odwrotną do macierzy $A$ oznaczamy, o ile istnieje, jako $A^{-1}$.

Przykłady:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Definicja

Powiemy, że macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ jest **odwrotna** do macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$, jeśli

$$AB = BA = I_n.$$

Mówimy wtedy, że $A$ jest **odwracalna**. Macierz odwrotną do macierzy $A$ oznaczamy, o ile istnieje, jako $A^{-1}$.

Przykłady:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
- Jeśli $A = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, to $A^{-1} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

## Definicja

Powiemy, że macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ jest **odwrotna** do macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$, jeśli

$$AB = BA = I_n.$$

Mówimy wtedy, że $A$ jest **odwracalna**. Macierz odwrotną do macierzy $A$ oznaczamy, o ile istnieje, jako $A^{-1}$.

Przykłady:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
- Jeśli $A = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, to $A^{-1} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.
- Jeśli $\phi$ – izomorfizm, to $(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1} = M(\phi^{-1})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

## Definicja

Powiemy, że macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ jest **odwrotna** do macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$, jeśli

$$AB = BA = I_n.$$

Mówimy wtedy, że $A$ jest **odwracalna**. Macierz odwrotną do macierzy $A$ oznaczamy, o ile istnieje, jako $A^{-1}$.

Przykłady:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
- Jeśli $A = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, to $A^{-1} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.
- Jeśli $\phi$ – izomorfizm, to $(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1} = M(\phi^{-1})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.
- $(E_{ij}^{n}(x))^{-1} = E_{ij}^{n}(-x)$.

## Definicja

Powiemy, że macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ jest **odwrotna** do macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$, jeśli

$$AB = BA = I_n.$$

Mówimy wtedy, że $A$ jest **odwracalna**. Macierz odwrotną do macierzy $A$ oznaczamy, o ile istnieje, jako $A^{-1}$.

Przykłady:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
- Jeśli $A = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, to $A^{-1} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.
- Jeśli $\phi$ – izomorfizm, to $(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1} = M(\phi^{-1})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.
- $(E_{ij}^{n}(x))^{-1} = E_{ij}^{n}(-x)$.
- $(T_{ij}^{n})^{-1} = T_{ij}$.

## Definicja

Powiemy, że macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ jest **odwrotna** do macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$, jeśli

$$AB = BA = I_n.$$

Mówimy wtedy, że $A$ jest **odwracalna**. Macierz odwrotną do macierzy $A$ oznaczamy, o ile istnieje, jako $A^{-1}$.

Przykłady:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
- Jeśli $A = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, to $A^{-1} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.
- Jeśli $\phi$ – izomorfizm, to $(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1} = M(\phi^{-1})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.
- $(E_{ij}^n(x))^{-1} = E_{ij}^n(-x)$.
- $(T_{ij}^n)^{-1} = T_{ij}$.
- $(I_i^n(c))^{-1} = I_i^n(c^{-1})$.

### Fakt

Macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^n$ zadane warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$ jest izomorfizmem.

**Fakt**

Macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^n$ zadane warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$ jest izomorfizmem.

Dowód:

- Jeśli $A$ jest odwracalna i $AB = I$, to niech $\psi : K^n \to K^n$ będzie zadane warunkiem $M(\psi)_{st}^{st} = B$.

## Fakt

Macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^n$ zadane warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$ jest izomorfizmem.

Dowód:

- Jeśli $A$ jest odwracalna i $AB = I$, to niech $\psi : K^n \to K^n$ będzie zadane warunkiem $M(\psi)_{st}^{st} = B$.
- Wówczas

$$M(\phi \circ \psi)_{st}^{st} = M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\psi)_{st}^{st} = A \cdot B = I = M(id)_{st}^{st}.$$

## Fakt

Macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^n$ zadane warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$ jest izomorfizmem.

Dowód:

- Jeśli $A$ jest odwracalna i $AB = I$, to niech $\psi : K^n \to K^n$ będzie zadane warunkiem $M(\psi)_{st}^{st} = B$.
- Wówczas

$$M(\phi \circ \psi)_{st}^{st} = M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\psi)_{st}^{st} = A \cdot B = I = M(id)_{st}^{st}.$$

- Zatem $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Analogicznie z $BA = I$ mamy $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$.

## Fakt

Macierz $A \in M_{n \times n}(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^n$ zadane warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$ jest izomorfizmem.

Dowód:

- Jeśli $A$ jest odwracalna i $AB = I$, to niech $\psi : K^n \to K^n$ będzie zadane warunkiem $M(\psi)_{st}^{st} = B$.
- Wówczas
$$M(\phi \circ \psi)_{st}^{st} = M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\psi)_{st}^{st} = A \cdot B = I = M(id)_{st}^{st}.$$
- Zatem $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Analogicznie z $BA = I$ mamy $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$.
- Zatem $\phi$ i $\psi$ to wzajemnie odwrotne izomorfizmy.

## Fakt

Macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^n$ zadane warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$ jest izomorfizmem.

Dowód:

- Jeśli $A$ jest odwracalna i $AB = I$, to niech $\psi : K^n \to K^n$ będzie zadane warunkiem $M(\psi)_{st}^{st} = B$.
- Wówczas
$$M(\phi \circ \psi)_{st}^{st} = M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\psi)_{st}^{st} = A \cdot B = I = M(id)_{st}^{st}.$$
- Zatem $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Analogicznie z $BA = I$ mamy $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$.
- Zatem $\phi$ i $\psi$ to wzajemnie odwrotne izomorfizmy.
- Odwrotnie, jeśli $\phi$ jest izomorfizmem oraz $\psi = \phi^{-1}$, to biorąc $B = M(\psi)_{st}^{st}$ mamy:
$$A \cdot B = M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\psi)_{st}^{st} = M(\phi \circ \phi^{-1}) = M(\mathrm{id})_{st}^{st} = I.$$

## Fakt

Macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^n$ zadane warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$ jest izomorfizmem.

Dowód:

- Jeśli $A$ jest odwracalna i $AB = I$, to niech $\psi : K^n \to K^n$ będzie zadane warunkiem $M(\psi)_{st}^{st} = B$.
- Wówczas

$$M(\phi \circ \psi)_{st}^{st} = M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\psi)_{st}^{st} = A \cdot B = I = M(id)_{st}^{st}.$$

- Zatem $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Analogicznie z $BA = I$ mamy $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$.
- Zatem $\phi$ i $\psi$ to wzajemnie odwrotne izomorfizmy.
- Odwrotnie, jeśli $\phi$ jest izomorfizmem oraz $\psi = \phi^{-1}$, to biorąc $B = M(\psi)_{st}^{st}$ mamy:

$$A \cdot B = M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\psi)_{st}^{st} = M(\phi \circ \phi^{-1}) = M(\mathrm{id})_{st}^{st} = I.$$

- Analogicznie $BA = I$, co kończy dowód.

### Wniosek

Niech $A \in M_{n\times n}(K)$. Jeśli istnieje $B \in M_{n\times n}(K)$ takie, że $A \cdot B = I$, to też $B \cdot A = I$. Ponadto taka macierz $B$ jest wyznaczona przez $A$ jednoznacznie.

## Wniosek

Niech $A \in M_{n\times n}(K)$. Jeśli istnieje $B \in M_{n\times n}(K)$ takie, że $A \cdot B = I$, to też $B \cdot A = I$. Ponadto taka macierz $B$ jest wyznaczona przez $A$ jednoznacznie.

## Uwaga

Niech $A' \in M_{n\times n}(K)$ będzie macierzą otrzymaną z $A$ przez sprowadzenie do zredukowanej postaci schodkowej za pomocą elementarnych operacji na wierszach. Wówczas $A$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $A' = I$.

### Wniosek

Niech $A \in M_{n \times n}(K)$. Jeśli istnieje $B \in M_{n \times n}(K)$ takie, że $A \cdot B = I$, to też $B \cdot A = I$. Ponadto taka macierz $B$ jest wyznaczona przez $A$ jednoznacznie.

### Uwaga

Niech $A' \in M_{n \times n}(K)$ będzie macierzą otrzymaną z $A$ przez sprowadzenie do zredukowanej postaci schodkowej za pomocą elementarnych operacji na wierszach. Wówczas $A$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $A' = I$.

### Twierdzenie

Macierz $A$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $A$ jest iloczynem macierzy typu $E_{ij}(x)$, $T_{ij}$, $I_i(y)$, gdzie $y \neq 0$.

### Definicja

**Funkcjonałem liniowym** na przestrzeni liniowej $V$ nad ciałem $K$ nazywamy przekształcenie liniowe $\phi : V \to K$. Zbiór

$$V^* = L(V, K)$$

funkcjonałów liniowych na $V$ nazywamy **przestrzenią sprzężoną** do $V$.

## Definicja

**Funkcjonałem liniowym** na przestrzeni liniowej $V$ nad ciałem $K$ nazywamy przekształcenie liniowe $\phi : V \to K$. Zbiór

$$V^* = L(V, K)$$

funkcjonałów liniowych na $V$ nazywamy **przestrzenią sprzężoną** do $V$.

Przykłady:

- $f \in (\mathbb{Q}^3)^*$ zadany wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3$,

**Definicja**

**Funkcjonałem liniowym** na przestrzeni liniowej $V$ nad ciałem $K$ nazywamy przekształcenie liniowe $\phi : V \to K$. Zbiór

$$V^* = L(V, K)$$

funkcjonałów liniowych na $V$ nazywamy **przestrzenią sprzężoną** do $V$.

Przykłady:

- $f \in (\mathbb{Q}^3)^*$ zadany wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3$,
- $\Psi \in (F(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^*$ zadany wzorem $\Psi(f) = f(0)$,

## Definicja

**Funkcjonałem liniowym** na przestrzeni liniowej $V$ nad ciałem $K$ nazywamy przekształcenie liniowe $\phi : V \to K$. Zbiór

$$V^* = L(V, K)$$

funkcjonałów liniowych na $V$ nazywamy **przestrzenią sprzężoną** do $V$.

Przykłady:

- $f \in (\mathbb{Q}^3)^*$ zadany wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3$,
- $\Psi \in (F(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^*$ zadany wzorem $\Psi(f) = f(0)$,
- $tr \in (M_{n\times n}(\mathbb{R}))^*$ zadany wzorem $tr([a_{ij}]) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

## Uwaga

Niech $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni $V$ i niech $f_i : V \to K$ będzie jedynym funkcjonałem liniowym takim, że:

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jesli } i = j \\ 0, & \text{jesli } i \neq j. \end{cases} \qquad (\star)$$

Wówczas:

(a) $v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \ldots + f_n(v)v_n$, czyli $f_i$ przyporządkowuje wektorowi jego $i$-tą współrzędną w bazie $\mathcal{A}$,

(b) dla dowolnego $f \in V^*$ mamy $f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n$, i jest to przedstawienie jednoznaczne,

(c) układ funkcjonałów $\mathcal{A}^* = (f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą $V^*$ i wartość funkcjonału $f \in V^*$ na wektorze $v_j$ jest $j$-tą współrzędną tego funkcjonału w bazie $\mathcal{A}^*$.

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jesli } i = j \\ 0, & \text{jesli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas

$$v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \ldots + f_n(v)v_n,$$

czyli $f_i$ przyporządkowuje wektorowi jego $i$-tą współrzędną w bazie $\mathcal{A}$.

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jesli } i = j \\ 0, & \text{jesli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas

$$v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \ldots + f_n(v)v_n,$$

czyli $f_i$ przyporządkowuje wektorowi jego $i$-tą współrzędną w bazie $\mathcal{A}$.

Dowód:

- Jeśli $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$, to:

$$\begin{aligned} f_i(v) &= a_1 f_i(v_1) + a_2 f_i(v_2) + \ldots + a_n f_i(v_n) = \\ &= a_i f_i(v_i) = \\ &= a_i. \end{aligned}$$

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jesli } i = j \\ 0, & \text{jesli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas $(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą $V^*$

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, \text{ jesli } i = j \\ 0, \text{ jesli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas $(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą $V^*$

Dowód:

- Załóżmy, że istnieją takie $a_1, \ldots, a_n \in K$, że

$$a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 0,$$

przy czym 0 po prawej stronie interpretujemy jako funkcjonał zerowy!

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jesli } i = j \\ 0, & \text{jesli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas $(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą $V^*$

Dowód:

- Załóżmy, że istnieją takie $a_1, \ldots, a_n \in K$, że

  $$a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 0,$$

  przy czym 0 po prawej stronie interpretujemy jako funkcjonał zerowy!
- A zatem dla każdego $v \in V$ mamy $(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n)(v) = 0$.

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jesli } i = j \\ 0, & \text{jesli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas $(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą $V^*$

Dowód:

- Załóżmy, że istnieją takie $a_1, \ldots, a_n \in K$, że

$$a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 0,$$

  przy czym 0 po prawej stronie interpretujemy jako funkcjonał zerowy!
- A zatem dla każdego $v \in V$ mamy $(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n)(v) = 0$.
- Z drugiej strony biorąc element $v_i$ bazy $\mathcal{A}$ mamy:

$$(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n)(v_i) = a_1 f_1(v_i) + \ldots + a_n f_n(v_i) = a_i.$$

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jesli } i = j \\ 0, & \text{jesli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas $(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą $V^*$

Dowód:

- Załóżmy, że istnieją takie $a_1, \ldots, a_n \in K$, że
$$a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 0,$$
przy czym 0 po prawej stronie interpretujemy jako funkcjonał zerowy!
- A zatem dla każdego $v \in V$ mamy $(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n)(v) = 0$.
- Z drugiej strony biorąc element $v_i$ bazy $\mathcal{A}$ mamy:
$$(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n)(v_i) = a_1 f_1(v_i) + \ldots + a_n f_n(v_i) = a_i.$$
- A zatem $a_i = 0$, dla każdego $1 \leq i \leq n$. A zatem $(f_1, \ldots, f_n)$ jest układem liniowo niezależnym.

Niech
$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jesli } i = j \\ 0, & \text{jesli } i \neq j. \end{cases}$$
Wówczas $(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą $V^*$

Dowód cd.:

- Niech $f \in V^*$. Twierdzimy, że:
$$f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n.$$

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jesli } i = j \\ 0, & \text{jesli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas $(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą $V^*$

Dowód cd.:

- Niech $f \in V^*$. Twierdzimy, że:

$$f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n.$$

- Aby stwierdzić czy dwa przekształcenia są identyczne wystarczy to sprawdzić na dowolnej bazie $V$, na przykład na $(v_1, \ldots, v_n)$.

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jesli } i = j \\ 0, & \text{jesli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas $(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą $V^*$

Dowód cd.:

- Niech $f \in V^*$. Twierdzimy, że:

$$f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n.$$

- Aby stwierdzić czy dwa przekształcenia są identyczne wystarczy to sprawdzić na dowolnej bazie $V$, na przykład na $(v_1, \ldots, v_n)$.
- Wówczas rzeczywiście:

$$(f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n)(v_i) = f(v_1)f_1(v_i) + \ldots + f(v_n)f_n(v_i) = f(v_i) \cdot 1.$$

Niech

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{jesli } i = j \\ 0, & \text{jesli } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas $(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą $V^*$

Dowód cd.:

- Niech $f \in V^*$. Twierdzimy, że:

$$f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n.$$

- Aby stwierdzić czy dwa przekształcenia są identyczne wystarczy to sprawdzić na dowolnej bazie $V$, na przykład na $(v_1, \ldots, v_n)$.
- Wówczas rzeczywiście:

$$(f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \ldots + f(v_n)f_n)(v_i) = f(v_1)f_1(v_i) + \ldots + f(v_n)f_n(v_i) = f(v_i) \cdot 1.$$

- A zatem układ $(f_1, \ldots, f_n)$ rozpina $V^*$. Pokazaliśmy więc (b), a i też (c).

**Definicja**

Bazę $\mathcal{A}^*$ zdefiniowaną w uwadze wzorem $(\star)$ nazywamy **bazą dualną** do bazy $\mathcal{A}$. Bazą sprzężoną do bazy standardowej przestrzeni $K^n$ jest baza złożona z funkcjonałów postaci $f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, dla $1 \leq i \leq n$. Bazę tą oznaczamy $st^*$.

## Definicja

Bazę $\mathcal{A}^*$ zdefiniowaną w uwadze wzorem $(\star)$ nazywamy **bazą dualną** do bazy $\mathcal{A}$. Bazą sprzężoną do bazy standardowej przestrzeni $K^n$ jest baza złożona z funkcjonałów postaci $f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, dla $1 \leq i \leq n$. Bazę tą oznaczamy $st^*$.

**Przykład.** Niech $\alpha_1 = (1, 3), \alpha_2 = (2, 7)$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Weźmy

$$\alpha_1^*(x_1, x_2) = 7x_1 - 2x_2, \quad \alpha_2^*(x_1, x_2) = -3x_1 + 1x_2.$$

Wówczas, jak we wzorze $(\star)$ mamy:

$$\alpha_1^*(\alpha_1) = 1, \quad \alpha_1^*(\alpha_2) = 0, \quad \alpha_2^*(\alpha_1) = 0, \quad \alpha_2^*(\alpha_2) = 1.$$

Zauważmy, że jeśli wpiszemy współczynniki funkcjonałów w macierz (w kolumny), a wektory z wyjściowej bazy wpiszemy w wiersze macierzy, dostaniemy zależność:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Problem wyznaczania bazy dualnej jest problemem rozwiązania układu równań danego warunkami z $(\star)$.

## Definicja

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $V$, $W$ to przestrzenie liniowe nad ciałem $K$. **Przekształceniem sprzężonym** do $\phi$ nazywamy przekształcenie $\phi^* : W^* \to V^*$ określone wzorem

$$\phi^*(g) = g \circ \phi.$$

Innymi słowy jest to takie przekształcenie, które bierze funkcjonał $g : W \to K$ i przeprowadza go na funkcjonał $\phi^*(g) : V \to K$ tak, że następujący diagram jest przemienny dla każdego $g \in W^*$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, dashed, "\phi^*(g)"] \arrow[dr, "\phi"'] & & K \\
& W \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

**Przykład.** Weźmy przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2, 4x_3).$$

**Przykład.** Weźmy przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2, 4x_3).$$

Zatem $\phi^* : (\mathbb{R}^2)^* \to (\mathbb{R}^3)^*$. Na przykład dla funkcjonału $g \in (\mathbb{R}^2)^*$ danego wzorem

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

mamy $\phi^*(g) \in (\mathbb{R}^3)^*$ dany wzorem:

$$\phi^*(g)(x_1, x_2, x_3) = g(\phi(x_1, x_2, x_3)) = g(2x_1 + 3x_2, 4x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3.$$

**Przykład.** Weźmy przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2, 4x_3).$$

Zatem $\phi^* : (\mathbb{R}^2)^* \to (\mathbb{R}^3)^*$. Na przykład dla funkcjonału $g \in (\mathbb{R}^2)^*$ danego wzorem

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

mamy $\phi^*(g) \in (\mathbb{R}^3)^*$ dany wzorem:

$$\phi^*(g)(x_1, x_2, x_3) = g(\phi(x_1, x_2, x_3)) = g(2x_1 + 3x_2, 4x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3.$$

Jak opisać *wzorem* $\phi^*$? W bazach dualnych do standardowych mamy:

$$\phi^*(\epsilon_1^*) = \epsilon_1^*(2x_1 + 3x_2, 4x_3) = 2x_1 + 3x_2 = 2\epsilon_1^* + 3\epsilon_2^*$$
$$\phi^*(\epsilon_1^*) = \epsilon_2^*(2x_1 + 3x_2, 4x_3) = 4x_3 = 4\epsilon_3^*.$$

Zatem macierz $\phi^*$ w bazach dualnych do standardowych jest transponowana do macierzy $M(\phi)_{st}^{st}$:

$$M(\phi^*)_{st^*}^{st^*} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

### Twierdzenie

Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni $V$ oraz $W$. Niech $\phi \in L(V, W)$. Wówczas:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\phi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})^T,$$

gdzie $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą $V$ oraz $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ jest bazą $W$.

### Twierdzenie

Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni $V$ oraz $W$. Niech $\phi \in L(V, W)$. Wówczas:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\phi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})^T,$$

gdzie $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą $V$ oraz $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ jest bazą $W$.

Dowód:

- Niech $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ baza dualna do $\mathcal{A}$ oraz $(w_1^*, \ldots, w_m^*)$ baza dualna do $\mathcal{B}$.

## Twierdzenie

Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni $V$ oraz $W$. Niech $\phi \in L(V, W)$. Wówczas:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\phi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})^T,$$

gdzie $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą $V$ oraz $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ jest bazą $W$.

Dowód:

- Niech $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ baza dualna do $\mathcal{A}$ oraz $(w_1^*, \ldots, w_m^*)$ baza dualna do $\mathcal{B}$.
- Z definicji macierzy przekształcenia liniowego mamy, że $i$-ty wyraz $j$ tej kolumny macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest $i$-tą współrzędną wektora $\phi(v_j)$ w bazie $\mathcal{B}$.

## Twierdzenie

Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni $V$ oraz $W$. Niech $\phi \in L(V, W)$. Wówczas:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\phi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})^T,$$

gdzie $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą $V$ oraz $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ jest bazą $W$.

Dowód:

- Niech $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ baza dualna do $\mathcal{A}$ oraz $(w_1^*, \ldots, w_m^*)$ baza dualna do $\mathcal{B}$.
- Z definicji macierzy przekształcenia liniowego mamy, że $i$-ty wyraz $j$ tej kolumny macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest $i$-tą współrzędną wektora $\phi(v_j)$ w bazie $\mathcal{B}$.
- Z definicji bazy dualnej $\mathcal{B}^*$ wiadomo, że ta współrzędna wynosi $a_{ij} = w_i^*(\phi(v_j))$. Po transpozycji macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ wyraz $a_{ij}$ staje się $i$-tym wyrazem $j$-tego wiersza macierzy transponowanej.

## Twierdzenie

Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni $V$ oraz $W$. Niech $\phi \in L(V, W)$. Wówczas:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\phi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})^T,$$

gdzie $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą $V$ oraz $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ jest bazą $W$.

Dowód:

- Niech $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ baza dualna do $\mathcal{A}$ oraz $(w_1^*, \ldots, w_m^*)$ baza dualna do $\mathcal{B}$.
- Z definicji macierzy przekształcenia liniowego mamy, że $i$-ty wyraz $j$ tej kolumny macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest $i$-tą współrzędną wektora $\phi(v_j)$ w bazie $\mathcal{B}$.
- Z definicji bazy dualnej $\mathcal{B}^*$ wiadomo, że ta współrzędna wynosi $a_{ij} = w_i^*(\phi(v_j))$. Po transpozycji macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ wyraz $a_{ij}$ staje się $i$-tym wyrazem $j$-tego wiersza macierzy transponowanej.
- Odpowiedni wyraz $b_{ji}$ macierzy $M(\phi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$ jest $j$-tą współrzędną $i$-tej kolumny tej macierzy, a więc to $j$-ta współrzędna wektora $\phi^*(w_i^*)$ w bazie $\mathcal{A}^*$.

## Twierdzenie

Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni $V$ oraz $W$. Niech $\phi \in L(V, W)$. Wówczas:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\phi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})^T,$$

gdzie $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą $V$ oraz $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ jest bazą $W$.

Dowód:

- Niech $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ baza dualna do $\mathcal{A}$ oraz $(w_1^*, \ldots, w_m^*)$ baza dualna do $\mathcal{B}$.
- Z definicji macierzy przekształcenia liniowego mamy, że $i$-ty wyraz $j$ tej kolumny macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest $i$-tą współrzędną wektora $\phi(v_j)$ w bazie $\mathcal{B}$.
- Z definicji bazy dualnej $\mathcal{B}^*$ wiadomo, że ta współrzędna wynosi $a_{ij} = w_i^*(\phi(v_j))$. Po transpozycji macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ wyraz $a_{ij}$ staje się $i$-tym wyrazem $j$-tego wiersza macierzy transponowanej.
- Odpowiedni wyraz $b_{ji}$ macierzy $M(\phi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$ jest $j$-tą współrzędną $i$-tej kolumny tej macierzy, a więc to $j$-ta współrzędna wektora $\phi^*(w_i^*)$ w bazie $\mathcal{A}^*$.
- Ale $\phi^*(w_i^*) = w_i^* \circ \phi$, a jego $j$-ta współrzędna w bazie $\mathcal{A}^*$ to $w_i^*(\phi(v_j))$

### Twierdzenie

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

(a) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest epimorfizmem,

(b) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest monomorfizmem.

### Twierdzenie

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

(a) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest epimorfizmem,

(b) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest monomorfizmem.

Dowód dla $\dim V, \dim W < \infty$.

**Twierdzenie**

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

(a) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest epimorfizmem,

(b) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest monomorfizmem.

Dowód dla $\dim V, \dim W < \infty$. Wiemy już, że $r(\phi) = r(\phi^*)$, a zatem na mocy twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu mamy równoważności:

## Twierdzenie

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

(a) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest epimorfizmem,

(b) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest monomorfizmem.

Dowód dla $\dim V, \dim W < \infty$. Wiemy już, że $r(\phi) = r(\phi^*)$, a zatem na mocy twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu mamy równoważności:

- $\phi$ jest monomorfizmem,

## Twierdzenie

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

(a) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest epimorfizmem,

(b) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest monomorfizmem.

Dowód dla $\dim V, \dim W < \infty$. Wiemy już, że $r(\phi) = r(\phi^*)$, a zatem na mocy twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu mamy równoważności:

- $\phi$ jest monomorfizmem,
- $r(\phi) = \dim V$,

## Twierdzenie

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

(a) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest epimorfizmem,

(b) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest monomorfizmem.

Dowód dla $\dim V, \dim W < \infty$. Wiemy już, że $r(\phi) = r(\phi^*)$, a zatem na mocy twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu mamy równoważności:

- $\phi$ jest monomorfizmem,
- $r(\phi) = \dim V$,
- $r(\phi^*) = \dim V^*$,

## Twierdzenie

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

(a) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest epimorfizmem,

(b) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest monomorfizmem.

Dowód dla $\dim V, \dim W < \infty$. Wiemy już, że $r(\phi) = r(\phi^*)$, a zatem na mocy twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu mamy równoważności:

- $\phi$ jest monomorfizmem,
- $r(\phi) = \dim V$,
- $r(\phi^*) = \dim V^*$,
- $\phi^*$ jest epimorfizmem.

## Twierdzenie

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

(a) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest epimorfizmem,

(b) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest monomorfizmem.

Dowód dla $\dim V, \dim W < \infty$. Wiemy już, że $r(\phi) = r(\phi^*)$, a zatem na mocy twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu mamy równoważności:

- $\phi$ jest monomorfizmem,
- $r(\phi) = \dim V$,
- $r(\phi^*) = \dim V^*$,
- $\phi^*$ jest epimorfizmem.

oraz równoważności:

- $\phi$ jest epimorfizmem,

## Twierdzenie

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

(a) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest epimorfizmem,

(b) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest monomorfizmem.

Dowód dla $\dim V, \dim W < \infty$. Wiemy już, że $r(\phi) = r(\phi^*)$, a zatem na mocy twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu mamy równoważności:

- $\phi$ jest monomorfizmem,
- $r(\phi) = \dim V$,
- $r(\phi^*) = \dim V^*$,
- $\phi^*$ jest epimorfizmem.

oraz równoważności:

- $\phi$ jest epimorfizmem,
- $r(\phi) = \dim W$,

## Twierdzenie

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

(a) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest epimorfizmem,

(b) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest monomorfizmem.

Dowód dla $\dim V, \dim W < \infty$. Wiemy już, że $r(\phi) = r(\phi^*)$, a zatem na mocy twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu mamy równoważności:

- $\phi$ jest monomorfizmem,
- $r(\phi) = \dim V$,
- $r(\phi^*) = \dim V^*$,
- $\phi^*$ jest epimorfizmem.

oraz równoważności:

- $\phi$ jest epimorfizmem,
- $r(\phi) = \dim W$,
- $r(\phi^*) = \dim W^*$,

## Twierdzenie

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

(a) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest epimorfizmem,

(b) $\phi$ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ gdy $\phi^*$ jest monomorfizmem.

Dowód dla $\dim V, \dim W < \infty$. Wiemy już, że $r(\phi) = r(\phi^*)$, a zatem na mocy twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu mamy równoważności:

- $\phi$ jest monomorfizmem,
- $r(\phi) = \dim V$,
- $r(\phi^*) = \dim V^*$,
- $\phi^*$ jest epimorfizmem.

oraz równoważności:

- $\phi$ jest epimorfizmem,
- $r(\phi) = \dim W$,
- $r(\phi^*) = \dim W^*$,
- $\phi^*$ jest monomorfizmem.

### Definicja

Oznaczmy $(V^*)^* = V^{**}$. Niech $\phi : V \to K$ będzie funkcjonałem liniowym. **Ewaluacją** funkcjonału $\phi$ w wektorze $v$ jest przekształcenie $e_v : V^* \to K$ zadane wzorem $e_v(\phi) = \phi(v)$.

### Definicja

Oznaczmy $(V^*)^* = V^{**}$. Niech $\phi : V \to K$ będzie funkcjonałem liniowym. **Ewaluacją** funkcjonału $\phi$ w wektorze $v$ jest przekształcenie $e_v : V^* \to K$ zadane wzorem $e_v(\phi) = \phi(v)$.

### Twierdzenie

Niech $V$ będzie przestrzenią skończonego wymiaru. Przekształcenie $e : V \to V^{**}$ zadane wzorem $e(v) = e_v$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

## Definicja

Oznaczmy $(V^*)^* = V^{**}$. Niech $\phi : V \to K$ będzie funkcjonałem liniowym. **Ewaluacją** funkcjonału $\phi$ w wektorze $v$ jest przekształcenie $e_v : V^* \to K$ zadane wzorem $e_v(\phi) = \phi(v)$.

## Twierdzenie

Niech $V$ będzie przestrzenią skończonego wymiaru. Przekształcenie $e : V \to V^{**}$ zadane wzorem $e(v) = e_v$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Dowód (szkic):

- Oczywiście $e$ jest przekształceniem liniowym.

### Definicja

Oznaczmy $(V^*)^* = V^{**}$. Niech $\phi : V \to K$ będzie funkcjonałem liniowym. **Ewaluacją** funkcjonału $\phi$ w wektorze $v$ jest przekształcenie $e_v : V^* \to K$ zadane wzorem $e_v(\phi) = \phi(v)$.

### Twierdzenie

Niech $V$ będzie przestrzenią skończonego wymiaru. Przekształcenie $e : V \to V^{**}$ zadane wzorem $e(v) = e_v$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Dowód (szkic):

- Oczywiście $e$ jest przekształceniem liniowym.
- Mamy $\dim V = \dim V^{**}$, więc wystarczy pokazać, że $e$ jest monomorfizmem.

### Definicja

Oznaczmy $(V^*)^* = V^{**}$. Niech $\phi : V \to K$ będzie funkcjonałem liniowym. **Ewaluacją** funkcjonału $\phi$ w wektorze $v$ jest przekształcenie $e_v : V^* \to K$ zadane wzorem $e_v(\phi) = \phi(v)$.

### Twierdzenie

Niech $V$ będzie przestrzenią skończonego wymiaru. Przekształcenie $e : V \to V^{**}$ zadane wzorem $e(v) = e_v$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Dowód (szkic):

- Oczywiście $e$ jest przekształceniem liniowym.
- Mamy $\dim V = \dim V^{**}$, więc wystarczy pokazać, że $e$ jest monomorfizmem.
- A zatem wektor $v$ ma tę własność, że $e_v(\phi) = 0$, dla każdego $\phi$.

### Definicja

Oznaczmy $(V^*)^* = V^{**}$. Niech $\phi : V \to K$ będzie funkcjonałem liniowym. **Ewaluacją** funkcjonału $\phi$ w wektorze $v$ jest przekształcenie $e_v : V^* \to K$ zadane wzorem $e_v(\phi) = \phi(v)$.

### Twierdzenie

Niech $V$ będzie przestrzenią skończonego wymiaru. Przekształcenie $e : V \to V^{**}$ zadane wzorem $e(v) = e_v$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Dowód (szkic):

- Oczywiście $e$ jest przekształceniem liniowym.
- Mamy $\dim V = \dim V^{**}$, więc wystarczy pokazać, że $e$ jest monomorfizmem.
- A zatem wektor $v$ ma tę własność, że $e_v(\phi) = 0$, dla każdego $\phi$.
- Oznacza to, że $\phi(v) = 0$, dla każdego $\phi \in V^*$. Stąd $v = 0$.

Kilka uwag o przestrzeni sprzężonej do przestrzeni nieskończonego wymiaru.

Kilka uwag o przestrzeni sprzężonej do przestrzeni nieskończonego wymiaru.

- Jeżeli $V$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $K$ i $\dim(V) = \infty$, to

  $$\dim V^* = |K|^{\dim V}.$$

  Dowód można przeczytać w skrypcie dr. Strojnowskiego, ale wymagana jest wiedza ze Wstępu do Matematyki.

Kilka uwag o przestrzeni sprzężonej do przestrzeni nieskończonego wymiaru.

- Jeżeli $V$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $K$ i $\dim(V) = \infty$, to
$$\dim V^* = |K|^{\dim V}.$$
Dowód można przeczytać w skrypcie dr. Strojnowskiego, ale wymagana jest wiedza ze Wstępu do Matematyki.

- Na przedmiocie zwanym Analizą Funkcjonalnych będzie sporo rozważań o przestrzeniach sprzężonych do różnych przestrzeni funkcji (modulo pewne relacje). To będzie ważne. Także na Analizie II.2 pojawi się ten wątek.

Kilka uwag o przestrzeni sprzężonej do przestrzeni nieskończonego wymiaru.

- Jeżeli $V$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $K$ i $\dim(V) = \infty$, to
$$\dim V^* = |K|^{\dim V}.$$
Dowód można przeczytać w skrypcie dr. Strojnowskiego, ale wymagana jest wiedza ze Wstępu do Matematyki.

- Na przedmiocie zwanym Analizą Funkcjonalnych będzie sporo rozważań o przestrzeniach sprzężonych do różnych przestrzeni funkcji (modulo pewne relacje). To będzie ważne. Także na Analizie II.2 pojawi się ten wątek.

- Można (nietrudne) pokazać, że $K[x]^* \simeq K[[x]]$, gdzie $K[[x]]$ jest zbiorem nieskończonych sum formalnych postaci:
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i,$$
gdzie $a_i \in K$. Przestrzeń $K[[x]]$ nazywamy **szeregami formalnymi** nad $K$.