Geometria z Algebrą Liniową I

dr Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 1, 20.10.2020 r.

Wykład odbywa się w każdy wtorek o 8:30 na platformie Zoom.
Prowadzący: dr Arkadiusz Męcel, prof. Jarosław Wiśniewski

- Obecność i wybór prowadzącego
- Poczekalna (waiting room) na Zoomie
- Logowanie imieniem i nazwiskiem
- Mikrofon, kamera
- Komunikacja na czacie
- Nagrywanie wykładu
- Udostępnianie materiałów

GAL na Moodle:

- https://moodle.mimuw.edu.pl/course/view.php?id=531
- rejestracja: „Dołącz do kursu", klucz dostępu: gal#2020
- nagrania z wykładów i testy (72 godziny), slajdy, materiały, kolokwium...

Sage – platforma do obliczeń

- https://sage.mimuw.edu.pl/
- informacja o dostępie: aktualności w Moodle
- strona prof. J. Wiśniewskiego: www.mimuw.edu.pl/~jarekw/SZKOLA/GAL/
- strona dr A. Nagórko: www.mimuw.edu.pl/~amn/gal2020

```
In [3]: A = IMatrix([[2, 3, 1], [3,1,0]], separate=1, var=['x', 'y'])
        show(A.as_equations())
```

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

```
In [4]: A.as_equations().rescale_row(0, -3)
```

Out[4]:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \quad / \cdot -3 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x - 9y = -3 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

```
In [5]: A.as_equations().rescale_row(1, 2)
```

Out[5]:

$$\begin{cases} -6x - 9y = -3 \\ 3x + y = 0 \quad / \cdot 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x - 9y = -3 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$$

Komunikacja (Arkadiusz Męcel)

- Kontakt: `a.mecel@mimuw.edu.pl`
- Konsultacje (Zoom): poniedziałki 14:15-15:45
- Strona wydziałowa: www.mimuw.edu.pl/~amecel/
- W budynku wydziałowym: pokój 1110 (raczej mnie tam nie będzie)

Zasady zaliczenia

- zaliczenie = obecność na ćwiczeniach + punkty
- Do zdobycia jest 300 punktów:
- kolokwium pierwsze (zdalne) 5 grudnia – 80 punktów,
- kolokwium drugie (stacjonarne) 23 stycznia – 120 punktów,
- kolokwium dodatkowe – na początku sesji,
- ćwiczenia – 80 punktów (prace domowe i praca na zajęciach),
- testy po wykładach – 20 punktów.
- Ocena końcowa – progi ustalane są pod koniec semestru.

Ramowy plan wykładu:

- układy równań liniowych o współczynnikach w ciele,
- ciało liczb zespolonych, zasadnicze twierdzenie algebry,
- przestrzenie liniowe, liniowa niezależność, baza, wymiar,
- rząd macierzy i klasyfikacja rozwiązań układów równań liniowych,
- operacje na przestrzeniach liniowych,
- przekształcenia liniowe,
- przestrzeń funkcjonałów,
- wyznacznik.

Dużo nowych pojęć wynika m.in. z **nowego sposobu stawiania pytań**!

Przykładowe idee:

- algebraiczny opis „obiektów geometrycznych"(i odwrotnie),
- geometryczna natura „obiektów matematycznych",
- niezmienniki geometryczne w języku algebry,
- klasyfikowanie obiektów geometrycznych o wybranych własnościach,
- operacje algebraiczne nie zmieniające natury geometrycznej,
- struktura i klasyfikacja „operacji niezmienniczych",
- niezmienniki operacji, i ich klasyfikacja ze względu na nie.

Będziemy się uczyć tego **w jaki sposób w matematyce stawia się pytania**.
To jest ważne zarówno w samej matematyce, jak i w zastosowaniach (np. w życiu).

Definicja 1. (na razie niepełna)

Niech $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ będzie zbiorem skończonym. **Równanie liniowe** na **zbiorze zmiennych** X o **współczynnikach** w zbiorze K to wyrażenie postaci

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \text{ gdzie } a_1, a_2, \dots, a_n, b \in K.$$

Rozwiązanie powyższego równania to ciąg $s_1, s_2 \dots s_n \in K$ taki, że

$$a_1 \cdot s_1 + a_2 \cdot s_2 + \ldots + a_n \cdot s_n = b.$$

Definicja 1. (na razie niepełna)

Niech $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie zbiorem skończonym. **Równanie liniowe** na **zbiorze zmiennych** X o **współczynnikach** w zbiorze K to wyrażenie postaci

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b, \text{ gdzie } a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in K.$$

Rozwiązanie powyższego równania to ciąg $s_1, s_2 \ldots s_n \in K$ taki, że

$$a_1 \cdot s_1 + a_2 \cdot s_2 + \ldots + a_n \cdot s_n = b.$$

Przykłady:

Definicja 1. (na razie niepełna)

Niech $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie zbiorem skończonym. **Równanie liniowe** na **zbiorze zmiennych** X o **współczynnikach** w zbiorze K to wyrażenie postaci

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \text{ gdzie } a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in K.$$

Rozwiązanie powyższego równania to ciąg $s_1, s_2 \ldots s_n \in K$ taki, że

$$a_1 \cdot s_1 + a_2 \cdot s_2 + \ldots + a_n \cdot s_n = b.$$

Przykłady:

- $X = \{x\}, K = \mathbb{R}$, równanie $\sqrt{2}x = \pi$, ale nie: $2x + 1 = 3$ lub $2x = x$.

Definicja 1. (na razie niepełna)

Niech $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie zbiorem skończonym. **Równanie liniowe** na **zbiorze zmiennych** X o **współczynnikach** w zbiorze K to wyrażenie postaci

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b, \text{ gdzie } a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in K.$$

Rozwiązanie powyższego równania to ciąg $s_1, s_2 \ldots s_n \in K$ taki, że

$$a_1 \cdot s_1 + a_2 \cdot s_2 + \ldots + a_n \cdot s_n = b.$$

Przykłady:

- $X = \{x\}, K = \mathbb{R}$, równanie $\sqrt{2}x = \pi$, ale nie: $2x + 1 = 3$ lub $2x = x$.
- $X = \{x_1, x_2, x_3\}, K = \mathbb{Q}$, równanie: $\frac{1}{2}x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$, ale nie $\sqrt{2}x_1 = 2$.

Definicja 1. (na razie niepełna)

Niech $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie zbiorem skończonym. **Równanie liniowe** na **zbiorze zmiennych** X o **współczynnikach** w zbiorze K to wyrażenie postaci

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \text{ gdzie } a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in K.$$

Rozwiązanie powyższego równania to ciąg $s_1, s_2 \ldots s_n \in K$ taki, że

$$a_1 \cdot s_1 + a_2 \cdot s_2 + \ldots + a_n \cdot s_n = b.$$

Przykłady:

- $X = \{x\}, K = \mathbb{R}$, równanie $\sqrt{2}x = \pi$, ale nie: $2x + 1 = 3$ lub $2x = x$.
- $X = \{x_1, x_2, x_3\}, K = \mathbb{Q}$, równanie: $\frac{1}{2}x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$, ale nie $\sqrt{2}x_1 = 2$.

Pytanie na później: czego oczekujemy od zbioru K? Na razie $K = \mathbb{R}$.

Definicja 2.

Układ m **równań liniowych** na zbiorze $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ o współczynnikach rzeczywistych to ciąg m równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań liniowych to ciąg $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$, który jest rozwiązaniem każdego z m równań liniowych tego układu.

Przykłady:

- $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 1 \\ \quad - \frac{1}{2}x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

Przykłady:

- $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 1 \\ \quad\ \ - \frac{1}{2}x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 & = 1 \\ x_1 + \ \ x_2 & = 1 \\ x_1 + \ \ x_2 & = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 & = 3 \end{cases}$$

Przykłady:

- $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 1 \\ \quad - \frac{1}{2}x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 & = 1 \\ x_1 + \ \ x_2 & = 1 \\ x_1 + \ \ x_2 & = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 & = 3 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + \ \ x_3 & = 0 \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 & = 0 \end{cases}$$

Definicja 3.

Układ U złożony z m równań liniowych na zbiorze $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ o współczynnikach rzeczywistych postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \; a_{12}x_2 + \ldots + \; a_{1n}x_n & = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

nazywamy

- **jednorodnym**, jeśli $b_i = 0$, dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$,
- **niesprzecznym**, jeśli zbiór rozwiązań układu U jest niepusty,
- **sprzecznym**, jeśli zbiór rozwiązań układu U jest pusty.

Definicja 4.

Układy równań liniowych określone na tym samym zbiorze zmiennych i o tym samym zbiorze współczynników nazwiemy **równoważnymi**, jeśli mają one te same zbiory rozwiązań.

Definicja 4.

Układy równań liniowych określone na tym samym zbiorze zmiennych i o tym samym zbiorze współczynników nazwiemy **równoważnymi**, jeśli mają one te same zbiory rozwiązań.

Przykład. Następujące układy równań liniowych zmiennych x_1, x_2 nad $\mathbb{R}$ są równoważne:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} = 1 \\ \phantom{x_1+{}} x_2 = -1 \end{cases}$$

Definicja 4.

Układy równań liniowych określone na tym samym zbiorze zmiennych i o tym samym zbiorze współczynników nazwiemy **równoważnymi**, jeśli mają one te same zbiory rozwiązań.

Przykład. Następujące układy równań liniowych zmiennych x_1, x_2 nad $\mathbb{R}$ są równoważne:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Kluczowa idea: rozwiązywanie układów równań polega na zamianie bardziej skomplikowanych układów na równoważne – prostsze.

Definicja 5.

Niech U oraz U' będą równoważnymi układami równań liniowych o n zmiennych (niewiadomych). Przypuśćmy, że układ U' **można przepisać** w postaci:

$$\begin{cases} x_{j_1} & = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + d_1 \\ \ldots & \\ x_{j_k} & = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \ldots + c_{kn}x_n + d_k \end{cases}$$

przy czym $j_1 < \ldots < j_k$ oraz zmienne $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ nie występują po prawej stronie (to znaczy: stoją przy nich współczynniki zerowe, czyli $c_{ij} = 0$, dla $j = j_1, \ldots, j_k$).

Mówimy wówczas, że:

- układ U' **jest rozwiązaniem ogólnym** (zadaje rozwiązanie ogólne) układu U,
- w rozwiązaniu tym $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ nazywamy **zmiennymi zależnymi**,
- pozostałe x_i nazywamy **zmiennymi niezależnymi**, albo **parametrami**.

Rozważmy układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Układ ten ma rozwiązanie ogólne. Jest nim na przykład:

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{1}{2} \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases},$$

bo układ ten **można przepisać** do postaci:

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{1}{2} \\ x_2 & = -x_3 - x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Rozwiązanie (zmienne zależne: x_1, x_2, zmienne niezależne: x_3, x_4):

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, -s - t + \frac{1}{2}, s, t \right), \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definicja 6.

Macierzą rozmiaru $m \times n$ (inaczej: macierzą o m wierszach i n kolumnach) o **wyrazach** ze zbioru K nazywamy tablicę:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix}$$

gdzie $d_{ij} \in K$ dla $1 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq n$. Będziemy też pisać $D = [d_{ij}]$.

Rzędy poziome macierzy D nazywamy **wierszami**, rzędy pionowe zaś nazywamy **kolumnami**. Zbiór wszystkich macierzy $m \times n$ o wyrazach ze zbioru K oznaczamy jako $M_{m\times n}(K)$.

Definicja 7.

Każdemu układowi równań liniowych postaci:

$$U:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{cases}$$

możemy przypisać macierz $m \times (n+1)$ postaci:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Nazywamy ją **macierzą** (albo **macierzą rozszerzoną**) układu U. Macierz powstałą przez pominięcie ostatniej kolumny w macierzy układu U będziemy nazywać **macierzą współczynników** układu U.

układ | macierz rozszerzona | macierz współczynników

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 1 \\ \quad - \frac{1}{2}x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 & = 1 \\ x_1 + \ x_2 & = 1 \\ x_1 + \ x_2 & = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 & = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + \ x_3 & = 0 \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 & = 0 \end{cases}$$

układ	macierz rozszerzona	macierz współczynników
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ \quad -\frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 = 3 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

układ

macierz rozszerzona

$$\begin{cases} x_1 & & & = 2 \\ & x_2 & & = 1 \\ & & x_3 & = 4 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{1}{2} \\ x_2 + x_3 + x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Definicja 8.

Mówimy, że macierz $A = [a_{ij}]$ jest w **postaci schodkowej**, jeśli A spełnia następujące warunki:

- każdy wiersz zerowy (tzn. złożony z samych zer) znajduje się poniżej każdego wiersza niezerowego (czyli jeśli i-ty wiersz tej macierzy jest niezerowy, to j-ty wiersz jest niezerowy tylko gdy $j > i$).
- dla każdego $i > 1$ pierwszy licząc od lewej niezerowy wyraz w i-tym wierszu znajduje się w kolumnie stojącej na prawo od pierwszego niezerowego wyrazu $(i-1)$-szego wiersza.

Przykład macierzy w postaci schodkowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Układ, dla którego jest to macierz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 + {}} 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 + 2x_2 + {}} 8x_3 + 9x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + {}} 10x_4 = 1 \end{cases}.$$

Definicja 9.

Mówimy, że macierz A jest w postaci schodkowej zredukowanej, jeśli:

- A jest w postaci schodkowej,
- w każdym niezerowym wierszu pierwszy niezerowy wyraz wynosi 1 i jest jedynym niezerowym wyrazem w swojej kolumnie.

Definicja 9.

Mówimy, że macierz A jest w postaci schodkowej zredukowanej, jeśli:

- A jest w postaci schodkowej,
- w każdym niezerowym wierszu pierwszy niezerowy wyraz wynosi 1 i jest jedynym niezerowym wyrazem w swojej kolumnie.

Przykłady:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Twierdzenie 1.

Następujące operacje przeprowadzają układ U w układ równoważny.

(1) Dodanie do równania innego równania pomnożonego przez liczbę
(2) Zamiana dwóch równań miejscami
(3) Pomnożenie równania przez liczbę różną od zera

Dowód na kolejnym wykładzie...

Definicja 10.

Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Następujące transformacje macierzy A nazywamy **operacjami elementarnymi na wierszach**.

(1) Dodanie do wiersza innego wiersza przemnożonego przez liczbę rzeczywistą

(2) Zamiana dwóch wierszy miejscami

(3) Pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera

Analogicznie definiuje się operacje elementarne na kolumnach macierzy A.

Przykłady operacji elementarnych na wierszach macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2\cdot w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{w_3 + w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\cdot w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 2.

Każdą macierz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ można:

(i) za pomocą operacji elementarnych typu (1) i (2) sprowadzić do postaci schodkowej,

(ii) za pomocą operacji elementarnych typu (1), (2) i (3) sprowadzić do postaci schodkowej zredukowanej.

Dowód na kolejnym wykładzie...

Wniosek 1

- Każdy niesprzeczny układ równań liniowych ma rozwiązanie ogólne.
- Aby znaleźć rozwiązanie układu U wystarczy macierz tego układu sprowadzić do zredukowanej postaci schodkowej elementarnymi operacjami na wierszach.
- Jeśli otrzymana macierz nie zawiera wiersza postaci $0 \ldots 0\,1$, to można z niej odczytać rozwiązanie ogólne układu U.
- Jeśli otrzymana macierz zawiera wiersz postaci $0 \ldots 0\,1$, to układ U jest sprzeczny.

Dowód na kolejnym wykładzie...

Definicja 11

Ciałem nazywamy piątkę $(K, \boxplus, \boxtimes, 0, 1)$, gdzie K jest zbiorem (przynajmniej dwuelementowym), działania $\boxplus$, $\boxtimes$ są 2-argumentowymi działaniami zwanymi dodawaniem i mnożeniem, zaś elementy $0, 1$ są 0-argumentowymi działaniami zwanymi zerem i jedynką taką, że spełnione są następujące **aksjomaty ciała**:

1)	$(a \boxplus b) \boxplus c = a \boxplus (b \boxplus c)$	$\forall_{a,b,c \in K}$	łączność dodawania
2)	$a \boxplus b = b \boxplus a$	$\forall_{a,b \in K}$	przemienność dodawania
3)	$a \boxplus 0 = a = 0 \boxplus a$	$\forall_{a \in K}$	własność elementu 0
4)	$a \boxplus b = 0 = b \boxplus a$	$\forall_{a \in K} \exists_{b \in K}$	element przeciwny
5)	$(a \boxtimes b) \boxtimes c = a \boxtimes (b \boxtimes c)$	$\forall_{a,b,c \in K}$	łączność mnożenia
6)	$a \boxtimes b = b \boxtimes a$	$\forall_{a,b \in K}$	przemienność mnożenia
7)	$a \boxtimes 1 = 1 \boxtimes a = a$	$\forall_{a \in K}$	własność elementu 1
8)	$a \boxtimes b = b \boxtimes a = 1$	$\forall_{a \in K \setminus \{0\}} \exists_{b \in K}$	odwrotność dla $a \neq 0$
9)	$a \boxtimes (b \boxplus c) = (a \boxtimes b) \boxplus (a \boxtimes c)$	$\forall_{a,b,c \in K}$	rozdzielność $\boxtimes$ wzgl. $\boxplus$

(Bardzo) podstawowe przykłady ciał:

- ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z operacjami $+$, $\cdot$,
- ciało liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ z operacjami $+$, $\cdot$,
- ciało reszt z dzielenia modulo liczba pierwsza p, czyli $\mathbb{Z}_p$, czyli z definicji:

Definicja 12

Niech p będzie liczbą pierwszą. Ciało $\mathbb{Z}_p$ jest to zbiór

$$\{0, 1, 2, \ldots, p-1\},$$

gdzie elementem zerowym jest 0, zaś elementem jedynkowym jest 1
oraz dla każdych $a, b \in \mathbb{Z}_p$:

- $a \boxplus b$ to reszta z dzielenia liczby całkowitej $a + b$ przez p,
- $a \boxtimes b$ to reszta z dzielenia liczby całkowitej $a \cdot b$ przez p.

Za tydzień:

- o ciałach „wolno i spokojnie",
- dowody twierdzeń i wniosku dla układów o współczynnikach w ciele,
- wstęp do ciała liczb zespolonych.