Kolokwium 1, 15.11.2017

Zadanie 1
Rozwiązać nierówność: $3\,\mathrm{tg}^4(x) - 10\,\mathrm{tg}^2(x) + 3 < 0$. **(10 p.)**

Zadanie 2
Rozwiązać równanie: $\log_3 x - \log_3(\frac{1}{x-4}) = 2$. **(8 p.)**

Zadanie 3
Niech $A = (1, 1, 2), B = (2, 3, 3), C = (-1, 1, 5), D = (0, 3, 5)$.

(a) Obliczyć pole trójkąta ABC. Czy ten trójkąt jest ostro-, prosto- czy rozwartokątny? **(3 p.)**

(b) Obliczyć objętość czworościanu $ABCD$. **(2 p.)**

(c) Podać przykład wektora $v \neq [0, 0, 0]$ takiego, że $\overrightarrow{AB} \times v = [0, 0, 0]$. **(2 p.)**

(d) Znaleźć wszystkie punkty E takie, że punkty A, B, E leżą na jednej prostej oraz odległość E od A jest dwukrotnie większa niż od B. **(3 p.)**

Zadanie 4

(a) Obliczyć $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[6]{2n^2+5}(n-\sin(n!))}{\sqrt[3]{n^4+7n+5}}$. **(3 p.)**

(b) Obliczyć $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1})^{2n}$. **(3 p.)**

(c) Niech $c \geqslant 0$. Określamy ciąg a_n poprzez warunki: $a_1 = c$ oraz $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ dla $n \geqslant 1$. Zbadać dla jakich c ciąg a_n jest rosnący oraz wykazać, że dla dowolnego c ciąg a_n ma skończoną granicę. **(6 p.)**