

8. Granice ciągów cz. 2

**Zadanie 1.** Oblicz granice korzystając z faktu, że:

jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a(a_n) = \log_a(g)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{g}$ , a także  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(a_n) = \sin(g)$ .

Oczywiście przy odpowiednich założeniach dla pierwiastka i logarytmu.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \frac{\sin(n!)}{n}}$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n}$ ,
- $\sin \left( \pi \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}}{n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}} \right)$ .

**Zadanie 2.** Korzystając z faktu, że jeśli ciąg ma granicę  $g$ , to każdy jego podciąg też ma tę granicę pokazać, że następujące ciągi nie mają granicy:

- $a_n = (-1)^n$ ,
- $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ ,
- $a_n = \sin \left( \frac{n\pi}{3} \right)$ .

**Zadanie 3.** Korzystając z twierdzenia o tym, że ciąg monotoniczny i ograniczony ma granicę, wyznacz:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , gdzie  $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}$  oraz  $a_1 = 2$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , gdzie  $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$  oraz  $a_1 = 2$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , gdzie  $a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$  oraz  $a_1 = 0,5$ ,
- (♣)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , gdzie  $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$  oraz  $a_1 = 3$ ,
- (♣)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , gdzie  $a_{n+1} = \sin a_n$  oraz  $a_1 = \frac{1}{10}$ .

**Zadanie 4.** Przedstaw następujące ułamki dziesiętne okresowe w postaci ułamka zwykłego:

- 0, (1),
- 0, (12),
- 0, (98),
- (♣) 0, (12345).

**Zadanie 5.** (\*) Pacjentowi przepisano antybiotyk, który przyjmować ma raz dziennie. Niech  $c_n$  oznacza ilość antybiotyku we krwi pacjenta w  $n$ -tym dniu przyjmowania leku (jednostką jest tu mg/mL). Każdego kolejnego dnia przed podaniem leku we krwi pacjenta pozostaje jedynie 30% leku, który miał we krwi poprzedniego dnia. W związku z tym każdego dnia dawka zwiększana jest o 0,2 mg/mL (łącznie z pierwszym dniem gdy we krwi nie ma jeszcze leku). Wyznacz ilość leku we krwi pacjenta czwartego dnia. Czy ilość leku we krwi wzrasta czy maleje? Czy jest ograniczona? Czy zbiega do pewnej granicy?

**Zadanie 6.** (\*) Pewien pacjent zainfekowany został wirusem, którego obecność w organizmie potraja się z każdą godziną. Gdy w organizmie jest już 2 000 000 jednostek wirusa, system odporności włącza się i redukuje skalę rozprzestrzeniania się wirusa o połowę, dodatkowo zabijając 500 000 jednostek wirusa w każdej godzinie. Dodatkowo, 6 godzin po uaktywnieniu się systemu immunologicznego do walki z wirusem dołącza leczenie zewnętrzne. Redukuje ono o  $\frac{1}{6}$  (już zredukowaną przez osobistą odporność pacjenta) skalę rozwoju wirusa i razem z systemem odporności zabija 25 000 000 kopii wirusa każdej godziny. Czy leczenie to ma szansę doprowadzić do eliminacji wirusa z organizmu pacjenta?