**Matematyka 0 dla Wydziału Chemii.**

**8. Granice ciągów cz. 1**

**Zadanie 1.** *Korzystając z twierdzenia o granicy ciągu typu* $a^n \cdot n^k$ *oraz z arytmetycznych własności granicy wyznacz granice ciągów:*

*a)* $a_n = \frac{2n-4}{5n+8}$ *b)* $a_n = \frac{5n^2+3n-2}{2n^2+5}$ *c)* $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}$ *d)* $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1000\sqrt[3]{n}+2000}$.

(♣) $a_n = \frac{n^4-7n+5}{5n^4+n+2}$ (♣) $a_n = \frac{n^3+10000666}{n^4-n-666}$ (♣) $a_n = \frac{-2n^4+17}{n^3-100n^2+7}$ (♣) $a_n = \frac{\sqrt{n^5}+n^2+7}{\sqrt{n}(n-5)}$.

*i)* $a_n = \frac{2^n+4^n}{5^n+3^n}$ *j)* $a_n = \frac{4^{n+1}+5\cdot 3^n}{8\cdot 4^{n-1}-7}$ *k)* $a_n = 4^n - 7^n + 3$ *l)* $a_n = \frac{3^n-2^n}{3^n+n^{3000}\cdot 2^n}$.

**Zadanie 2.** *Korzystając z wzoru skróconego mnożenia* $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = x-y$ *wyznacz:*

*a)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+7}-\sqrt{n}$ *b)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$ *c)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+12\sqrt{n}}-\sqrt{n+31}$.

**Zadanie 3.** *Korzystając ze znajomości granicy typu* $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ *oblicz granicę ciągu:*

*a)* $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ *b)* $\lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n}$ *c)* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$ *d)* (♣) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^{3n+2}$

(♣) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$, (♣) $\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+5n+7}\right)^n$ (♣) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ (♣) $\left(0,9+\frac{1}{n}\right)^n$.

**Zadanie 4.** *Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznacz granice:*

*a)* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$,

*b)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+\sin n}$,

*c)* $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+2^n\cdot\sin n}{3^{n+1}+n^{2002}}$

*d)* (♣) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+5^n n^7+\sin n}{5^n-n^3+\cos n}$,

*e)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+3^n}$,

*f)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n+8^n+10\cdot 10^n}$,

*g)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2\cdot 2^n+n\cdot(1,1)^{4n}}$,

*h)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n-2^n}$,

*i)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^7+2^7+\ldots+n^7}$,

*j)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

**Zadanie 5.** *Obliczyć granice ciągów korzystając z faktu, że:*

*jeśli* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *(oczywiście* $a_n \neq 0$, *dla każdego n)*

*a)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$,

*b)* (♣) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{5^n}$,

*c)* $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot 3^{2n}}{n!}$.

**Zadanie 6.** *Obliczyć granice ciągów korzystając z faktu, że*

*jeśli* $a_n > 0$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, *to* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g.$,

*a)* (♣) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$,

*b)* (♣) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$,

*c)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

**Zadanie 7.** *Obliczyć granicę korzystając z tzw. Lematu Stolza:*

*jeśli* $a_n, b_n$ *są ciągami,* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ *oraz ciąg* $b_n$ *jest od pewnego momentu ściśle rosnący, to o ile istnieje granica (skończona lub nieskończona)* $g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$, *to granica ta równa jest także:* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

*a)* (♣) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$,

*b)* $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}$.