Matematyka 0 dla Wydziału Chemii.

7. Ciągi

Zadanie 1. *Wypisać pierwsze trzy wyrazy ciągu* (a_n)*, a także wypisać wzór na wyraz* $2n$*-ty oraz* n^2*-ty.*

$$a_n = \frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n+13}, \qquad a_n = \sqrt{n+13} - \sqrt{n}, \qquad a_n = \frac{3^n-2^n}{3^n+n^2\cdot 2^n}$$
$$a_n = \sqrt{n}1 + 2^{(-1)^n}, \qquad a_n = \left(1+\frac{2}{n+2}\right)^n, \qquad a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Zadanie 2. *Wypisac cztery pierwsze wyrazy oraz wzór na wyraz ogólny ciągu* (x_n) *określonego wzorem rekurencyjnym postaci:*

a) $\begin{cases} x_1 &= 2 \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{3} \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_{n+1} &= 2x_n. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 &= \frac{3}{2} \\ x_{n+1} &= \frac{4}{3}x_n \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x_1 = 0, \ x_2 = \frac{-1}{2}, \\ x_{n+2} = (x_n)^2 \cdot x_{n+1} \end{cases}$.

Zadanie 3. *Zbadać które wyrazy podanych ciągów są mniejsze od danej liczby* m*:*

a) $a_n = \frac{1}{3n+2}$, $m = \frac{1}{100}$,

b) $b_n = \frac{3n}{n^2+1}$, $m = 0,001$,

c) $c_n = \frac{100n}{100+n^2}$, $m = \frac{23}{53}$.

Zadanie 4. *Pokazać, że ciąg* $a_n = \frac{n}{n+2}$ *jest rosnący.*

Zadanie 5. *Pokazać, że ciąg* $a_n = -\frac{2}{3}\log(n+1)$ *jest malejący.*

Zadanie 6. *Niech* $a_0 \in (0,2)$ *oraz* $a_{n+1} = a_n(2-a_n)$*, dla* $n = 0,1,\dots$. *Wykazać, że* $a_n \leqslant 1$ *oraz pokazać, że ciąg ten jest niemalejący.*

Zadanie 7. *Pokazać, że następujące ciągi* a_n, b_n *są rosnące.*

a) $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$,

b) $b_n = 1 + \frac{1}{3} + -\frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{2}{8} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{2}{4n}$.

Zadanie 8. *Pokazać, że zachodzą następujące oszacowania górne lub dolne:*

a) $\frac{2n+1}{n+1} > 2$,

b) $\sin(2^n + n^2) > -1$,

c) $\sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n} > 5$,

d) $\frac{3^n-1}{5^n+2} < \frac{3}{5}$.

Zadanie 9. *Czy jest prawdą, że od pewnego momentu wyrazu ciągu* $a_n = \frac{2n^2+15n+2007}{n^2-2006n+13}$ *są odległe od 2 o nie więcej niż* $\frac{1}{4}$*?*