

6. Wyznaczniki, iloczyn wektorowy, równanie płaszczyzny, odległość od niej

**Zadanie 1.** Obliczyć wyznaczniki  $2 \times 2$  oraz  $3 \times 3$ :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Zadanie 2.** Oblicz:

- a) pole równoległoboku rozpiętego na wektorach  $\vec{a} = [1, 2, -3]$ ,  $\vec{b} = [-1, 2, 5]$ ,  
 b) (♣) pole trójkąta o wierzchołkach  $A = (-1, 2, 0)$ ,  $B = (0, 3, 1)$ ,  $C = (10, -5, -1)$ ,  
 c) pole trójkąta o wierzchołkach  $A = (1, 3, 0)$ ,  $B = (6, 1, 2)$ ,  $C = (1, 0, 3)$ ,  
 d) objętość równoległościanu o wierzchołach  $A = (3, 4, 3)$ ,  $B = (9, 5, -1)$ ,  $C = (1, 7, 0)$ ,  $D = (3, 2, 5)$ .

**Zadanie 3.** Oblicz:

- a)  $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$  wiedząc, że  $\|\vec{a}\| = 10$ ,  $\|\vec{b}\| = 2$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 12$ .  
 b)  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  wiedząc, że  $\|\vec{a}\| = 3$ ,  $\|\vec{b}\| = 26$ ,  $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 72$ .

**Zadanie 4.** Wyznacz równanie ogólne płaszczyzny:

- a) przechodzącej przez punkty  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (4, 5, 6)$ ,  $C = (0, 0, 0)$ ,  
 b) (♣) przechodzącej przez punkty  $A = (3, -1, 2)$ ,  $B = (0, 2, 1)$ ,  $C = (4, 1, 2)$ ,  
 c) (♣) przechodzącej przez punkty  $A = (2, 7, -1)$ ,  $B = (4, 1, 2)$  i równoległej do wektora  $\vec{a} = [1, 0, 0]$ ,  
 d) przechodzącej przez punkt  $P = (0, 1, 0)$  i równoległej do wektorów  $\vec{a} = [-1, 3, 0]$ ,  $\vec{b} = [3, 1, 5]$ ,  
 e) przechodzącej przez punkt  $P = (-1, 4, 1)$  i równoległej do płaszczyzny  $\pi_1 : x - y + 6z - 12 = 0$ ,  
 f) przechodzącej przez punkt  $P = (2, 3, -6)$  i prostopadłej do płaszczyzn  
 $\pi_1 : x + y + z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : x - y + z = 0$ .

**Zadanie 5.** (♣) Obliczyć kąt między płaszczyzną  $\mathcal{P}_1$  opisaną równaniem  $2x - y - z - 1 = 0$  i płaszczyzną  $\mathcal{P}_2$  opisaną równaniem  $x + y - 2z = 0$ .

**Zadanie 6.** (♣) Obliczyć odległość punktu  $A = (-1, 3, 1)$  od płaszczyzny  $\mathcal{P}$  opisanej równaniem:  
 $4x - 3y + 112z - 39 = 0$ .

**Zadanie 7.** (♣) Obliczyć objętość czworoscianu o wierzchołkach  $A = (1, 2, 0)$ ,  $B = (4, 3, 0)$ ,  $C = (1, 1, 1)$ ,  $D = (2, 3, 1)$  oraz pole trójkąta  $ABC$ . Znaleźć odległość punktu  $D$  od płaszczyzny zawierającej punkty  $A, B, C$  oraz odległość punktu  $A$  od prostej zawierającej punkty  $B, C$ .

**Zadanie 8.** (♣) Niech  $A = (1, 1, 2)$ ,  $B = (2, 4, 3)$ ,  $C = (4, 2, 8)$ ,  $D = (3, -1, 7)$ . Wykazać, że te punkty są wierzchołkami równoległoboku oraz znaleźć punkt przecięcia jego przekątnych.

**Zadanie 9.** Niech  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (7, 4, 4)$ ,  $D = (9, 6, 2)$ ,  $A_1 = (1, 4, 8)$ ,  $C = B + D$ . Znaleźć pozostałe trzy wierzchołki równoległościanu  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (wykonać sobie rysunek pomocniczy!). Znaleźć pole równoległoboku  $ABCD$ . Znaleźć równanie płaszczyzny  $A_1 B_1 C_1$ . Znaleźć objętość równoległościanu  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Znaleźć kosinus kąta między prostymi  $AD$  i  $AA_1$ .