

16. Zadania powtórzeniowe

Zadanie 1. Znajdź $f^{(1000)}$, gdzie:

$$\begin{aligned} a) f(x) &= xe^x, & b) f(x) &= e^{2x}, & c) f(x) &= \sin(x) + \cos(2x), \\ d) f(x) &= \frac{1}{3x+1}, & e) f(x) &= \ln(x+2), & (\clubsuit) f(x) &= e^{x^4}. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Ile rozwiązań ma równanie

(metoda: wyznac przedziały monotoniczności i wartości w ewentualnych ekstremach lokalnych):

$$\begin{aligned} a) x^3 + 2x + 7 &= 0, & b) x^3 + 5x^2 + 3x + 15 &= 0, & c) 3x^3 + x^2 + 4x - 4 &= 0, \\ d) 2e^x + x^2 + 18x - 6 &= 0, & e) x^5 + 3x - 6 &= 0, \end{aligned}$$

Zadanie 3. Znaleźć liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru rzeczywistego a

(metoda: przenieś a na prawą stronę równości, a funkcję znajdującą się po lewej stronie spróbuj narysować i stwierdzić ile razy przecina jej wykres prosta pionowa $y = a$):

$$\begin{aligned} a) x^3 - a &= 12x, & b) \frac{2x^3}{x^2-9} &= a, & c) x + a\sqrt{x} &= a, & d) x^3 + (3-a)x^2 - 4 &= 0, \\ e) 3x^4 - 16x^3 - 6x^2 + 48x &= a, & f) \frac{x^2}{\ln(x)} &= \frac{4-a}{2}, & g) \left| \frac{e^{2x}}{e^x-1} \right| &= 2a. \end{aligned}$$

Zadanie 4. Wykazać nierówności

(metoda: przekształcić do nierówności $f(x) > 0$ i spróbować określić monotoniczność/wypukłość $f(x)$).

$$\begin{aligned} a) \sin(x) &> x - \frac{x^3}{6}, \text{ dla } x > 0, \\ b) 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} &> \cos(x), \text{ dla } x > 0, \\ c) \operatorname{ctg}(x) &> \frac{\pi}{2} - x, \text{ dla } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ d) \operatorname{tg}(x) &> x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5, \text{ dla } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ e) x(1 - \ln(2) + \ln(2+x)) &> (x+1)\ln(x+1), \text{ dla } x > 0, \\ f) \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x &< \sin(x) < x, \text{ dla } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ g) \operatorname{tg}(x) &> 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}), \text{ dla } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \\ (\clubsuit) \ln(x) &< -1 + \ln(10) + 0,1x, \text{ dla } 0 < x \neq 10, \\ i) \ln(x) &< \frac{1}{2}(x^2 - 1), \text{ dla } 0 < x \neq 1. \end{aligned}$$

Zadanie 5. Wyznacz dziedzinę, granice w punktach niewłaściwych, miejsca przecięcia z osiami, przedziały monotoniczności i wypukłości, ekstrema lokalne i punkty przegięcia oraz naszkicuj wykresy funkcji:

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \frac{e^x}{x}, \\ b) f(x) &= x - 2\operatorname{arctg}(x), \\ c) f(x) &= x - \ln(x+1), \\ d) f(x) &= \ln(x^2+1). \end{aligned}$$

Zadanie 6. Korzystając ze wzoru Taylora oblicz granice:

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x) - \cos(2x))^2}{x^4}, \\ (\clubsuit) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos(x)}{x^4}, \\ (\clubsuit) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{1 - \cos(2x)}, \\ (\clubsuit) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x \sin(x)}, \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{\sin^3(x)}, \\ f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+2x) - 2x^2 + 2x^3}{\cos(x^2) - 1}. \end{aligned}$$