Matematyka 0 dla Wydziału Chemii.

15.Wzór Taylora

Zadanie 1. *Napisać wzór na n-tą pochodną* $f^{(n)}(x)$ *funkcji* $f(x)$*, gdzie*

a) $f(x) = e^{2x}$,

b) $f(x) = xe^x$,

c) $f(x) = \sin(2x)$,

d) $f(x) = \sin(x^2)$,

e) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$,

(♣) $f(x) = e^{x^4}$.

Zadanie 2. *Napisać pierwsze cztery wyrazy wielomianu Taylora w punkcie* 0 *dla funkcji:*

a) $f(x) = \sin(x)$,

b) $f(x) = \cos(2x)$,

c) $f(x) = e^{-2x}$,

d) $f(x) = xe^{-x}$,

e) $f(x) = \frac{x+2}{3x+5}$.

Zadanie 3. *Napisać pierwsze cztery wyraz wielomianu Taylora w danym punkcie* x_0*:*

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$*, dla* $x_0 = 1$,

b) $f(x) = \sqrt{x}$*, dla* $x_0 = 4$,

c) $f(x) = \sin^2(x)$*, dla* $x_0 = \frac{\pi}{2}$,

d) $f(x) = x^3 \ln(x)$*, dla* $x_0 = 1$.

Zadanie 4. *Piszemy, że* $f(x) = o(g(x))$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$*. Uzadadnić:*

a) Jeśli $f(x) = o(x^5)$ *to także* $f(x) = o(x), f(x) = o(x^2), f(x) = o(x^3), f(x) = o(x^4)$,

b) Jeśli $f(x) = o(x^k)$*, to* $x^n f(x) = o(x^{n+k})$ *przy* $x \to 0$,

c) Jeśli $f(x) = o(x^k)$*,* $g(x) = o(x^n)$*, to* $f(x)g(x) = o(x^{n+k})$ *oraz* $f(x) + g(x) = o(x^?)$,

d) $x^2 - \sin^2(x) - \frac{x^4}{3} = o(x^4)$,

e) $\operatorname{tg}^2(x) - x^2 = o(x^2)$,

f) $(\cos(x) - \cos(2x))^2 - \frac{9}{4}x^4 = o(x^4)$,

Zadanie 5. *Korzystając ze wzoru Taylora oblicz granice:*

(♣) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$,

(♣) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}+\cos(x\sqrt{2})-2\cos(x^{2008})}{x^4}$,

(♣) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\cos(x)}{x^4}$,

(♣) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-\sin(x)}{1-\cos(2x)}$,

(♣) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x\sin(x)}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)-x}{\sin^3(x)}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\ln(1+2x)-2x^2+2x^3}{\cos(x^2)-1}$.