Matematyka 0 dla Wydziału Chemii.

14. Zastosowania pochodnej do badania przebiegu zmienności funkcji

Zadanie 1. *Ile rozwiązań ma równanie:*

(♣) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$

b) $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$

c) $e^x = ax^2$, *w zależności od* $a \in \mathbb{R}$,

(♣) $x^5 - 5a$, *w zależności od* $a \in \mathbb{R}$,

(♣) $\ln(x) = ax + b$, *w zależności od* $a, b \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. *Defiując odpowiednią funkcję* $f(x)$ *i pokazując jej monotoniczność wykazać nierówności:*

(♣) $\ln(x) < -1 + \ln(10) + \frac{x}{10}$, *dla* $0 < x \neq 10$,

(♣) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x < \sin(x)$, *dla* $0 < x < \frac{\pi}{4}$,

(♣) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$, *dla* $x > 0$,

d) $\mathrm{tg}(x) > x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$, *dla* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

e) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$, *dla* $0 < x \leqslant 1$.

Zadanie 3. *Wyznacz przedziały wypukłości i punkty przegięcia funkcji:*

a) $f(x) = 8x^2 - x^4$ *b)* $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ *c)* $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$

d) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ *e)* $f(x) = \sqrt[5]{x-1} + 5$ *f)* $f(x) = \sqrt[5]{(x-8)^6}$

g) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, *h)* $f(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$ *i)* $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$

j) $f(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x)$ *k)* $f(x) = 2\,\mathrm{tg}(x) - \mathrm{tg}^2(x)$ *l)* $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$.

Zadanie 4. *Zbadać przebieg zmienności i narysować wykres funkcji:*

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 16x - 16$ *b)* $f(x) = x^2(x^2-4)^5$ *c)* $f(x) = x^2\ln(x)$

d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ *e)* $f(x) = \frac{x^2-x-4}{x-1}$ (♣) $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$

g) $f(x) = x + 2\sqrt{-x}$, *h)* $f(x) = x^2\sqrt{36 - x^2}$ *i)* $f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$

j) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ *k)* $f(x) = \frac{-2x}{e^x}$ *l)* $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

Zadanie 5. (♣) *Zbadać przebieg zmienności i naszkicować wykres funkcji*

$$f(x) = (x+1)^{\frac{5}{3}}(x^2+2x)^{\frac{1}{3}}$$

wiedząc, że:

- $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}(x^2+2x)^{-\frac{2}{3}}(7x^2+14x+2)$, *przy czym pierwiastkami ostatniego równania są liczby* $x_5 \approx -1,845, x_6 \approx -0,155$,

- $f''(x) = \frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(x^2+2x)^{-\frac{5}{3}}(14x^4+56x^3+61x^2+10x-4)$ *a pierwiastkami wielomianu stopnia 4 są liczby* $x_1 \approx 0,177, x_2 \approx -2,177, x_3 \approx -0,492, x_4 \approx -1,508$.