**Matematyka 0 dla Wydziału Chemii.**

**10. Granice funkcji**

**Zadanie 1.** *Policz granice korzystając ze wzorów skróconego mnożenia i „sztuczek rachunkowych”.*

*a)* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x(x^2+2x-3)}{x^2-1}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-2}{x^3-8}$ *c)* $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$

*d)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^3-5x^2+6x-1}{x^3-7}$, *e)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3-3x+2}{x^3-1}$, *f)* $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{3x}$.

*g)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{2x}$ *h)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ *i)* $\lim\limits_{x\to \infty} x\sqrt{3}-\sqrt{3x^2+2x-5}$.

**Zadanie 2.** *Oblicz granice jednostronne funkcji w podanych punktach:*

*a)* $f(x)=\frac{x^3-3x-2}{x^2-2x}$, $x_0=0$, $x_0=2$.

*b)* $f(x)=x\sqrt{x-x^2}$, $x_0=0$, $x_0=1$,

*c)* $f(x)=\frac{|1+x|}{5-x}$, $x_0=-1$, $x_0=5$.

**Zadanie 3.** *Korzystając z faktu, że* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ *lub z innych własności wyznacz:*

*a)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x}{2\sin(2x)}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{tg}(x)}$

*d)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin(5x)}$ *e)* $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}(\sin(x))$ *f)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})\sin^2(2x)}{3x^4}$

*g)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$ *h)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)-\cos(\frac{1}{4}\pi)}{\sin(x)-\sin(\frac{\pi}{4})}$ *i)* $\lim\limits_{x\to 8} \frac{8-x}{\sin(\frac{\pi x}{8})}$.

**Zadanie 4.** *Korzystając z definicji funkcji arcsin*$(x)$ *wyznaczyć granice:*

*a)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arcsin(x)}{x}$

*b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-arcsin(x)}{3x+arcsin(x)}$

*c)* $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$.

**Zadanie 5.** *Bazując na granicy* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, *i podobnych, oblicz:*

*a)* $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{5x+1}{5x+3}\right)^{5x-2}$,

*b)* $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{-2x+3}{-2x}\right)^{x+3}$

**Zadanie 6.** *Bazując na granicy* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ *obliczyć granice:*

*a)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2\operatorname{tg}(\pi x))}{x}$,

*b)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{tg}(\sin(x)))}{x}$,

*c)* $\lim\limits_{x\to \infty} x\ln\left(\frac{x^2+3x+5}{x^2+33x+55}\right)$,

**Zadanie 7.** *Sprawdź czy podana funkcja jest ciągła. Spróbuj naszkicować wykres.*

*a)* $f(x)=\begin{cases} -x, & x\in(-\infty,-1) \\ x^2-2x+3, & x\in[-1,3], \\ x-3, & x\in(3,\infty). \end{cases}$ *b)* $f(x)=\begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & x<-1 \\ 2x+3, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ 2+2x+x^2, & x>1 \end{cases}$

*c)* $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-3}{1-x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \\ 2, & x\in\{-1,1\} \end{cases}$ *d)* $f(x)=\begin{cases} -(-x+1,5)^2, & x<1,5 \\ 3-2x, & x\geqslant 1,5. \end{cases}$

**Zadanie 8.** *Wyznacz asymptoty funkcji:*

*a)* $f(x)=\frac{3}{x+1}$ *b)* $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$ *c)* $f(x)=\frac{3x}{9-x^2}$ *d)* $f(x)=\frac{x^2+x^2-1}{x^2-1}$

*e)* $f(x)=\sqrt{x^2+x-6}$ *f)* $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ *g)* $f(x)=\ln(-x+3)$ *h)* $f(x)=e^{\frac{1}{1-x}}$.

**Zadanie 9.** *Korzystając z własności Darboux funkcji ciągłej pokaż, że:*

*a) równanie* $x^4+x^3-x^2-2x-2=0$ *ma co najmniej dwa różne pierwiastki,*

*b) równanie* $2^x=4x$ *ma dwa rozwiązania, c) równanie* $x\sin(x)=7$ *ma rozwiązanie.*