

Całka oznaczona, pole pod wykresem, długość krzywej, bryły obrotowe

Zadanie 1. Oblicz całki oznaczone:

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx \quad (b) \int_2^3 x\sqrt{x^2+1} dx \quad (c) \int_3^5 \frac{x}{x^2-4} dx \quad (d) \int_0^1 xe^{-x} dx \quad (e) \int_0^2 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx.$$

Zadanie 2. Oblicz pole figury zawartej pomiędzy następującymi krzywymi:

(a) $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2 + 2$

(b) $y = x^2, y = 1 - x^2, x = 2,$

(c) $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 2,$

(d) $y = x^2, x = y^2,$

(e) $y = x \sin(4x)$ i $y = 0, x = \frac{\pi}{8}$

(f) $y = \frac{4}{x}$, dla $x > 0$ oraz $g(x) = (x - 3)^3$, dla $x \in \mathbb{R}$.

Jeżeli funkcja $f(x)$ ma w przedziale $[a, b]$ ciągłą pochodną, to długość wykresu tej funkcji na przedziale $[a, b]$ to $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

Zadanie 3. Oblicz długość wykresu funkcji na podanym przedziale.

(a) $f(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\cos x}{\sin x}$ dla $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$,

(b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(1 + x^2)$ dla $1 \leq x \leq 4$,

(c) $f(x) = \frac{1}{3}x^{3/2}$ dla $x \in [0, 5]$,

(d) $f(x) = \frac{1}{3} \ln(\cos(3x))$ dla $x \in [-\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{12}]$,

(e) $f(x) = 2 \ln(4 - x^2)$ dla $x \in [0, 1]$,

(f) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, dla $x \in [3, 7]$,

(g) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$, dla $x \in [1, 2]$,

(h) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, gdzie $10 \leq x \leq 100$.

Jeśli f jest funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $[a, b]$ oraz ma ciągłą pochodną, to objętość bryły powstałej z obrotu wykresu f wokół osi OX to $\pi \int_a^b f^2(x) dx$, zaś pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu f wokół osi OX to $\pi \int_a^b 2f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

Zadanie 4. Oblicz objętość bryły, która powstała w wyniku obrotu wokół osi OX wykresu funkcji $f(x)$ na przedziale domkniętym, gdzie:

(a) $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$,

(b) $f(x) = 2x - x^2, 0 \leq x \leq 2$.

Zadanie 5. Oblicz pole powierzchni, która powstała w wyniku obrotu o kąt 2π wykresu funkcji $f(x)$ na przedziale domkniętym, gdzie:

(a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$,

(b) $f(x) = 15 + \sqrt{4 - (x - 5)^2}, 5 \leq x \leq 6$,

(c) $f(x) = \operatorname{tg}(x), \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.