Ćwiczenia IX. Proste i płaszczyzny w R^3.

Matematyka dla Geologii. Grupa 7.

Na ostatnich zajęciach mówiliśmy o pojęciach iloczynu skalarnego i wektorowego. Przypomnijmy te pojęcia.

- Niech $\vec{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n], \vec{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$ będą wektorami w R^n. Iloczyn skalarny tych wektorów jest liczbą, którą określamy wzorem:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n.$$

- Niech $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3], \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ będą wektorami w R^3. Iloczyn wektorowy tych wektorów jest wektorem w R^3, który określamy wzorem:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \left[\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right].$$

Jakie własności powinniśmy koniecznie pamiętać?

- dzięki iloczynowi skalarnemu możemy wyliczać kąt pomiędzy wektorami - wzór:

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \alpha.}$$

  W szczególności istotny jest przypadek prostopadłości wektorów. Wtedy iloczyn skalarny wynosi 0.

- dzięki iloczynowi wektorowemu możemy liczyć pole trójkąta o danych wierzchołkach
- iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\vec{v}, \vec{w}$ to wektor prostopadły do nich

Mówiliśmy wreszcie o równaniu płaszczyzny w przestrzeni trójwymiarowej. Ma ono postać ogólną:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ważna sprawa jest taka w R^3 wszystkie wektory prostopadłe do danej płaszczyzny są do siebie równoległe. To znaczy: jeśli narysujemy jakieś dowolne wektory prostopadłe do $\Pi \subseteq R^3$, to one są równoległe. Jednym z takich wektorów prostopadłych do $Ax + By + Cz + D = 0$. Jest wektor $[A, B, C]$.
Wreszcie mówiliśmy jak wyznaczyć równanie płaszczyzny π prostopadłej do wektora $\vec{a} = [A, B, C]$, przechodzącej przez punkt $P(x_0, y_0, z_0)$. Ma ono postać:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Wzór ten pozwala na rozwiązywanie zadań typu:

- wyznacz równanie płaszczyzny przechodzącej przez dane trzy punkty
- wyznacz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt i prostopadłej do danego wektora
- wyznacz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt i równoległej do dwóch wektorów

Zadanie 1. *Wyznacz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt* $K(2, 3, -1)$ *i równoległej do wektorów* $\vec{a} = [1, 2, 1], \vec{b} = [-3, 0, 1]$.

Zadanie 2. *Wyznacz kąt pomiędzy płaszczyznami:*

$$\pi_1 : \sqrt{2}x + y + z - 3 = 0, \quad \pi_2 : \sqrt{2}x - y - z + 7 = 0.$$

Co to jest kąt pomiędzy płaszczyznami? Jest to kąt pomiędzy wektorami prostopadłymi do nich. Dla przykładu, wektory prostopadłe do płaszczyzn podanych wyżej to $[\sqrt{2}, 1, 1], [\sqrt{2}, -1, -1]$. Kąt pomiędzy nimi liczymy ze wzoru:

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha.}$$

Jeżeli wynik nie mieści się w tabelce standardowych kątów, to wystarczy podać w wyniku cosinus.

* * *

Dziś będziemy się zajmować równaniem prostej w R^3. Aby opisać prostą nie wystarczy jedno równanie - tak jak w przypadku płaszczyzny. W zadaniach będziemy stosowali trzy metody opisu:

- równanie ogólne
- równanie parametryczne
- równanie kanoniczne

Równanie ogólne ma postać układu równań:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Równanie to mówi nam, że prosta jest przecięciem dwóch płaszcznyzn.
Równanie parametryczne ma również postać układu równań:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$$

Co oznacza ten zapis? Mówi on, że prosta to zbiór punktów (x, y, z) na płaszczyźnie, które dla dowolnego t rzeczywistego spełniają podane wyżej zależności. Przykład? Prosta $x = t, y = 2t, z = t$. Oznacza to, że na prostej o tym równaniu leżą tylko takie punkty, których pierwsza i trzecia współrzędna jest taka sama, a druga współrzędna jest dwa razy większa. Co oznacza to równanie? Mówi ono o prostej, która przechodzi przez punkt (x_0, y_0, z_0) oraz jej wektor kierunkowy to $[\alpha, \beta, \gamma]$.

Równanie kanoniczne opisuje prostą przy pomocy równości:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Zapis ten oznacza prostą, która przechodzi przez punkt (x_0, y_0, z_0) oraz ma kierunek wektora $[A, B, C]$. Nietrudno widzieć, że jest to bardzo podobne do postaci parametrycznej.

Zadanie 3. *Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkty $A(2,1,0), B(-1,1,-1)$.*

Wyznaczamy wektor kierunkowy tej prostej. Jest to na przykład $\vec{AB}$. Zatem jest to $[-3, 0, 1]$. Za punkt należący do prostej możemy wziąć na przykład $A(2,1,0)$. W ten sposób możemy napisać postać parametryczną tej prostej:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 0t \\ z = 0 + 1t \end{cases}.$$

Widzimy jednak, że skoro jedna ze współrzędnych wektora kierunkowego tej prostej, a więc $[-3, 0, 1]$, jest równa 0, to prosta ta nie ma postaci kanonicznej.

Zadanie 4. *Wyznaczyć prostą prostopadłą do płaszczyzny $x + y - 2z - 2 = 0$ przechodzącą przez punkt $M(1,1,1)$.*

Wektor prostopadły do podanej płaszczyzny będzie wektorem kierunkowym szukanej prostej. Jest to $[1, 1, -2]$. Zatem mając punkt $M(1,1,1)$ i wstawiając te dane do wzoru na postać kierunkową dostajemy opis szukanej prostej:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}.$$

Zadanie 5. *Wyznacz równanie płaszczyzny prostopadłej do prostej:*

$$l: \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

i przechodzącej przez punkt $M(0,0,0)$.

Potrzebujemy wyznaczyć wektor $[A, B, C]$ prostopadły do szukanej płaszczyzny. Wówczas mając punkt $M(0, 0, 0)$ skorzystamy ze wzoru

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Jak wyznaczyć wektor $[A, B, C]$? Skoro jest on prostopadły do szukanej płaszczyzny, to jest on równoległy do prostej, którą mamy podaną w zadaniu. Możemy więc przyjąć, że $[A, B, C]$ to wektor kierunkowy naszej prostej l. Jak go wyznaczyć z postaci ogólnej?

Prosta l to przecięcie płaszczyzn zadanych równaniami $x - y + 2z - 1 = 0$ oraz $x - 3z + 1 = 0$. Skoro tak, to wystarczy wziąż wektory prostopadłe do tych płaszczyzn, czyli $[1, -1, 2]$ oraz $[1, -3, 1]$ i wyznaczyć iloczyn wektorowy tych wektorów. W ten sposób dostamieny wektor równoległy równocześnie do obydwu z nich, a więc wektor kierunkowy prostej l.

Zadanie 6. *Podaj opis parametryczny prostej*

$$l : \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

Postępujemy podobnie jak w poprzednim zadaniu. Wyznaczamy wektor kierunkowy prostej l. Mając ten wektor znajdujemy jakiś punkt, który należy do tej prostej (a więc spełnia obydwa równania podane wyżej), jest to np. P(-1,-2,0). No i dalej podstawiamy do równania parametrycznego.

* * *

Ostatnim zagadnieniem z geometrii analitycznej będzie pojęcie odległości punktu od płaszczyzny. Załóżmy, że dany jest punkt $A(x_0, y_0, z_0)$ oraz płaszczyzna Π opisana równaniem $Ax + By + Cz + D = 0$. Pytanie: co to znaczy odległość punktu A od płaszczyzny Π? Jest to długość najkrótszego odcinka łączącego punkt A z jednym z punktów tej płaszczyzny. Jest to więc tak samo, jak na płaszczyźnie mówimy o odległości punktu od prostej (było na poprzednich etapach edukacji, prawda?). Wzór na odległość jest następujący:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Zadanie 7. *Wyznacz odległość punktu* $(1, 1, 2)$ *od płaszczyzny prostopadłej do wektora* $[1, 0, 0]$ *i przechodzącej przez punkt* $(0, 0, 1)$.

Wyznaczamy równanie płaszczyzny ze wzoru $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$, gdzie $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$, zaś $[A, B, C] = [1, 0, 0]$. Jest to zatem równanie postaci $x = 0$. Jaka jest odległość punktu $(1, 1, 2)$ od tej płaszczyzny? Zgodnie ze wzorem:

$$\frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = 1.$$

Zadanie 8. *Wyznacz równanie płaszczyzny równoległej do płaszczyzny $\pi : x - y + z + 3 = 0$ i oddalonej od niej o 4.*

Takie płaszczyzny będą dwie. Łatwo to sobie wyobrazić prościej – jak wezmę prostą na płaszczyźnie to ile jest prostych oddalonych od niej o 4? Po jednej z każdej strony, a więc dwie proste. Jak wyznaczyć szukane płaszczyzny? Skoro są one równoległe do π, to mają one taki sam jak π wektor prostopadły do siebie. Inaczej: jak wezmę wektor $[1, -1, 1]$, który jak wiadomo jest prostopadły do π, to skoro szukane płaszczyzny są do niego równoległe, to wektor $[1, -1, 1]$ jest prostopadły także do nich. A więc mają one równanie postaci:

$$x - y + z + D = 0.$$

I teraz pozostaje wyznaczyć D. Jak to zrobić?

Korzystamy ze wzoru na odległość punktu od płaszczyzny. Jakiego punktu? Wybieramy sobie punkt z płaszczyzny π, a więc dowolny punkt, którego współrzędne spełniają równanie $x - y + z + 3 = 0$. Jest to choćby $(-3, 0, 0)$. No i teraz wiem, że odległość tego punktu od płaszczyzny $x - y + z + D = 0$ wynosi 4. Zatem:

$$4 = \frac{|1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-3 + D|}{\sqrt{3}}.$$

Zatem $4\sqrt{3} = |-3 + D|$. Stąd mamy dwie możliwości: $D = 4\sqrt{3} + 3$ lub $D = -4\sqrt{3} + 3$.