Ćwiczenia VIII. Operacje na wektorach.

Matematyka dla Geologii. Grupa 7.

Na ostatnich zajęciach wprowadziliśmy pojęcie wektora w przestrzeni n-wymiarowej. Dziś powiemy więcej o różnorodnych operacjach na wektorach. Przypomnijmy jednak najpierw jak tworzymy wektory i jak liczymy ich długości.

Zadanie 1. *Znaleźć długość wektora* $4\vec{AB} - 2\vec{CD}$*, gdzie:*

$$A(2,1,5), \quad B(0,0,-1), \quad C(-1,-1,2), \quad D(-2,0,1).$$

Iloczyn skalarny wektorów.

Załóżmy, że $\vec{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ oraz $\vec{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$ są wektorami w przestrzeni n wymiarowej. Wówczas iloczynem skalarnym $\vec{v} \cdot \vec{w}$ nazywamy wektor postaci:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n.$$

Dla przykładu, iloczynem skalarnym wektorów $[1,3,5], [0,-1,1]$ jest liczba:

$$1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 = 0 + (-3) + 5 = 2$$

Po co są iloczyny skalarne? Otóż pozwalają one na wyliczanie **kąta pomiędzy wektorami**. Ale co to jest kąt pomiędzy wektorami?

Załóżmy na przykład, że mamy dwa wektory: $\vec{v} = [1,1], \vec{w} = [-1,1]$. Co to jest kąt między nimi?

Jeśli ustawimy obydwa te wektory tak, że ich początki będą w punkcie $(0,0)$, to ich drugie końce pojawią się w punktach, odpowiednio, A(1,1) oraz B(-1,1). Innymi słowy, wektor $\vec{v}$ jest od punktu $(0,0)$ do $A(1,3)$, zaś wektor $\vec{w}$ od punktu $(0,0)$ do $B(-1,1)$. Zauważmy, że w ten sposób otrzymujemy pewien kąt, pomiędzy prostymi, które przecinają się w punkcie $(0,0)$ i przechodzą - jedna przez punkt A, druga przez punkt B. To jest kąt między wektorami. Z rysunku łatwo jest przekonać się, że kąt ten wynosi $90°$. Liczenie go jest dość proste.

Załóżmy, że $\vec{v}, \vec{w}$ są wektorami w R^n i α jest kątem pomiędzy nimi. Wówczas:

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha.}$$

Przeliczmy przykład do końca. Iloczyn skalarny podanych wektorów to $-1+1=0$. Długości obydwu wektorów to $\sqrt{2}$. Zatem mamy równanie:

$$0=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\alpha.$$

Stąd $\cos\alpha=0$, a więc wektory są prostopadłe.

Ogólnie interesują nas przede wszystkim dwie sytuacje:

- wektory są równoległe – wówczas wychodzi, że istnieje taka liczba k, że $\vec{w}=k\vec{v}$
- wektory są prostopadłe – wówczas wychodzi, że $\cos\alpha=0$.

Zadanie 2. *Dane są wektory:*

$$\vec{a}=[6,-1,0,2],\quad \vec{b}=[2,12,3,0],\quad \vec{c}=[-24,4,0,8],\quad \vec{d}=[6,36,9,0].$$

- *obliczyć długości tych wektorów*
- *wskazać pary wektorów równoległych i prostopadłych*
- *znaleźć kąt pomiędzy wektorami* $4\vec{a}+\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$ *i* $3\vec{b}-\vec{a}-\vec{d}$.

Iloczyn wektorowy wektorów (tylko trójwymiarowe)

Jeśli $\vec{a}=[a_1,a_2,a_3],\vec{b}=[b_1,b_2,b_3]$ i wektory te nie są równoległe, wówczas określamy iloczyn wektorowy jako:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left[\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right].$$

Zadanie 3. *Dane są wektory:* $\vec{a}=[5,1,-1],\vec{b}=[2,-1,-3],\vec{c}=[0,2,4]$. *Wykonać działania:*

- $\vec{a}\times\vec{b}$
- $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}$
- $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$
- $\vec{a}\times\vec{b}-2\vec{a}\times\vec{c}$

Co to tak naprawdę jest iloczyn wektorowy?

Otóż jeśli mamy dwa nierównoległe wektory $\vec{v},\vec{w}$ w przestrzeni trójwymiarowej, to gdyby przyjąć, że mają one wspólny początek - jakiś konkretny punkt P, wówczas te dwa wektory określają kilka rzeczy. Po pierwsze dają one równoległobok, którego jednym z wierzchołków jest P. I okazuje się, że iloczyn wektorowy to wektor, który ma długość równą polu tego równoległoboku! To jedna ciekawa własność. Druga jest następująca. Ten równoległobok leży w przestrzeni R^3, ale tak naprawdę, to można go przecież rozważać na pewnej płaszczyźnie

II. Płaszczyzna Π jest jakoś położona w przestrzeni (może jakoś krzywo, ale jednak). Otóz wiadomo, że do płaszczyzny tej istnieje kierunek prostopadły. Kierunkiem tym jest, jak się okazuje, iloczyn wektorowy. Co to dokładniej znaczy zobaczymy na przykładach.

Zachodzi następujący wzór:

$$\boxed{|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin \alpha.}$$

Po co są iloczyny wektorowe?

- do wyznaczania pól trójkątów o danych wierzchołkach, jest to $P_{ABC} = \frac{1}{2}(|\vec{AB} \times \vec{AC}|)$
- do wyznaczania wektora prostopadłego do podanych dwóch wektorów
- do wyznaczania równania płaszczyzny przechodzącej przez dane punkty
  - wyznacz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty A, B, C
  - wyznacz równanie płaszczyzny równoległej do wektorów $\vec{v}, \vec{w}$ i przechodzącej przez punkt P
  - wyznacz równanie płaszczyzny prostopadłej do wektora $\vec{v}$ przechodzącej przez punkt P
- (za tydzień) do wyznaczania równania prostej w przestrzeni R^3
- (za tydzień) do rzutowania w przestrzeni R^3

Zadanie 4. *Wyznaczyć pole trójkąta ABC jeśli* $A(2, 1, 1), B(-1, 0, 2), C(-1, 3, 5)$.

Równanie płaszczyzny π prostopadłej do wektora $\vec{a} = [A, B, C]$, przechodzącej przez punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ ma postać:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Zadanie 5. *Wyznacz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty* $K(-1, 2, 3), L(0, 0, 0), M(-2, 1, 1)$.

Plan rozwiązania:

- wyznaczamy dowolne dwa nierównoległe wektory o początkach i końcach w K, L, M, np. $\vec{LK}, \vec{LM}$
- wyznaczamy wektor prostopadły do tych wektorów, a więc liczymy $\vec{LK} \times \vec{LM}$
- korzystamy ze wzory powyżej

Zadanie 6. *Wyznacz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt* $K(2, 3, -1)$ *i równoległej do wektorów* $\vec{a} = [1, 2, -1], \vec{b} = [-3, 0, 1]$.

Znowu wyznaczamy wektor prostopadły do $\vec{a}, \vec{b}$, a więc na przykład $\vec{a} \times \vec{b}$ i potem korzystamy ze wzoru.