Ćwiczenia VII. Wektory

Matematyka dla Geologii. Grupa 7.

W nawiązaniu do poprzedniego tematu, przypomnimy sobie dziś obliczanie macierzy odwrotnej do macierzy kwadratowej. Jest ona dana wzorem:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A^D)^T.$$

Przypomnijmy więc bardzo wyraźnie: macierz odwrotna istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy $A \neq 0$.

Zadanie 1. *Policz macierz odwrotną do macierzy:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dziś powiemy sobie o innych typach zadań związanych z tzw. równaniami macierzowymi.

Zadanie 2. *Rozwiąż równania macierzowe $X \cdot A = B$, $A \cdot Y = B$, $A \cdot Z \cdot B = C$, jeżeli:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie rozwiązujemy tak, jak rozwiązywalibyśmy równanie. Jeśli mamy rozwiązać równanie $XA = B$, gdzie X jest niewiadomo, to zwykle... przenosimy A na drugą stronę. Możemy to zrobić także w przypadku macierzowym. Nie znamy wprawdzie dzielenia macierzy, ale dzielenie to to samo, co mnożenie przez odwrotność, a wiec $a/b = ab^{-1}$. Zatem możemy przenosić macierze.

Warto zapamiętać regułę: jeśli macierze A, B są odwracalne, to:

$$XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}, \quad AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

<u>**Proszę pamiętać o stronach - przy mnożeniu macierzy kolejność ma znaczenie!**</u>

Zadanie 3. *Wyznacz wszystkie macierze X rozmiaru 2×2, które spełniają równanie:*

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadania typu: „wyznacz wszystkie macierze” rozwiązuje się tak: piszemy niewiadomą macierz X jako:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

i wykonujemy mnożenie:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zatem:

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostajemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 1 \\ ac + cd = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}.$$

Patrząc na trzecie równanie dostajemy warunek $c(a+d) = 0$. Mamy więc dwa przypadki $c = 0$ lub $a + d = 0$. Rozważymy się po kolei:

- $c = 0$. Wówczas układ równań upraszcza się:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ ab + bd = 1 \\ d^2 = 1 \end{cases}.$$

  Na podstawie pierwszego i trzeciego równania dostajemy cztery możliwości $a = \pm 1, d = \pm 1$.

  - $a = 1, d = 1$. Wówczas drugie równanie ma postać: $1 \cdot b + b \cdot 1 = 1$, a więc $b = \frac{1}{2}$. Dostajemy zatem jedno z rozwiązań:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  - $a = 1, d = -1$. Wówczas drugie równanie ma postać: $1 \cdot b + b \cdot (-1) = 1$, a więc równanie sprzeczne.
  - $a = -1, d = 1$. Wówczas drugie równanie ma postać: $(-1) \cdot b + b \cdot 1 = 1$, a więc równanie sprzeczne.
  - $a = -1, d = -1$. Wówczas drugie równanie ma postać: $(-1) \cdot b + b \cdot (-1) = 1$, a więc $b = -\frac{1}{2}$. Dostajemy zatem drugie rozwiązanie:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $a + d = 0$. W tym przypadku nie ma rozwiązań. Spójrzmy na drugie równanie wyjściowego układu równań: $ab + bd = 1$. Jest to to samo, co $b(a + d) = 1$. Jeśli $a + d = 0$, to jest to równanie sprzeczne.

Ostatecznie równanie ma dwa rozwiązania:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

* * *

<u>WEKTORY I PODSTAWY GEOMETRII ANALITYCZNEJ</u>

Zaczniemy od ostrzeżenia. Od tej pory porzuszać się będziemy w przestrzeniach wielowymiarowych. Np. płaszczyzna jest dwuwymiarowa, i rozumiemy przez to tyle, że każdy punkt ma dwie współrzędne rzeczywiste. Przestrzeń jest trójwymiarowa, jeśli każdy punkt ma trzy współrzędne. W ten sam sposób można mówić o przestrzeniach cztero- i więcej wymiarowych. Przestrzeń n-wymiarową oznaczamy R^n i oznacza to, że jeśli $P \in R^n$, to P ma współrzędne $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Liczby p_i są rzeczywiste i nazywamy je i-tymi współrzędnymi P. Na przykład pierwsza współrzędna punktu $(2, 3) \in R^2$, to 2, zaś druga współrzędna tego punktu to 3. Jak się okazuje jest to bardzo wygodny i przydatny w zastosowaniach sposób myślenia.

Załóżmy, że mamy punkty P_1 o współrzędnych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz P_2 o współrzędnych $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ leżące w R^n. Wektorem o początku P_1 i końcu w P_2 nazwiemy obiekt o n współrzędnych $P_1\vec{P}_2 = [v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n]$, gdzie $v_1 = y_1 - x_1, v_2 = y_2 - x_2, v_3 = y_3 - x_3, \ldots$ Dla przykładu, jeśli P_1 ma współrzędne $(3, 1, 0)$, zaś P_2 ma współrzędne $(-1, 0, 5)$, to wektor $\vec{(}P_1P_2)$ ma współrzędne $[-1 - 3, 0 - 1, 5 - 0] = [-4, -1, 5]$. Zatem $P_1\vec{P}_2 = [-3, -1, 5]$. Czym innym jest natomiast wektor $P_2\vec{P}_1$. Prowadzi on w przeciwną stronę, a więc jego współrzędne to $[3 - (-1), 1 - 0, 0 - 5] = [4, 1, -5]$.

Ten sam wektor może biec między wieloma punktami! Na przykład wektor $\vec{v} = [1, 0]$ łączy idzie od punktów $(0, 0)$ do $(1, 0)$, ale też od $(0.5, 3)$ do $(1.5, 3)$.

Załóżmy, że mamy wektor $\vec{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n] \in R^n$. Długością tego wektora, oznaczaną dalej przez $|\vec{v}|$ nazwiemy liczbę:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}.$$

Jeśli mamy punkty X i Y odpowiednio o współrzędnych $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ oraz $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, to odległością pomiędzy punktami X, Y nazwiemy długość wektora $X\vec{Y}$, a więc liczbę:

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Dla przykładu. Wektor $\vec{v} = [3, 1, -1]$ ma długość

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 1^1 + (-1)^2} = \sqrt{11}.$$

Odległość pomiędzy punktami $P_1(1,1,0,-3)$, $P_2(-3,4,0,1)$ wynosi

$$\sqrt{(1-(-3))^2+(1-4)^2+(0-0)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{16+9+0+16} = \sqrt{41}$$

i jest to rzeczywiście długość wektora.

Zadanie 4. *W przestrzeni R^3 dane są trzy punkty: $A(1,3,2)$, $B(0,1,1), C(-1,1,-1)$. Podać współrzędne wektorów $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{CA}, \vec{CB}$.*