Ćwiczenia PREZENTACJA. Operacje na macierzach

Matematyka dla Geologii. Grupa 7.

Na poprzednich zajęciach zajmowaliśmy się liczeniem rzędu macierzy i rozwiązywaniem układów równań.

Zadanie 1 (Zadanie 2.19)**.** *Rozwiąż układ równań:*

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 5t = 1 \\ x + 2y - 3z + 7t = 1 \\ 3x - y - 2z + 2t = 4 \end{cases}$$

Zadanie 2. *Przeprowadzić dyskusję rozwiązywalności układu równań w zależności od parametru m:*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y - z = m \end{cases}$$

Zadanie 3. *Przeprowadź dyskusję rozwiązalności układu równań w zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + 3y + mz = 2 \end{cases} .$$

Dodawanie i mnożenie macierzy - jak to się robi?

Dodawanie macierzy.**Macierze wolno dodawać, gdy są one takich samych rozmiarów**. Wtedy suma ma takie same rozmiary jak każdy ze składników i:

Na każdej współrzędnej (i,j) macierzy A + B stoi suma:
współrzędnej (i,j) macierzy A i współrzędnej (i,j) macierzy B.

Na przykład:

Mnożenie macierzy. Załóżmy, że:

- macierz A ma n_1 rzędów i m_1 kolumn
- macierz B ma n_2 rzędów i m_2 kolumn

Macierze A i B można pomnożyć tylko wtedy, gdy $m_1 = n_2$, a więc:

macierze można pomnożyć wtedy i tylko wtedy, gdy
ilość kolumn pierwszej macierzy jest taka sama jak ilość wierszy drugiej macierzy

.

Dla przykładu, nie istnieje iloczyn $A \cdot B$ macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

bo liczba kolumn w macierzy A to 4, a liczba wierszy w B to 2. Zauważmy jednak, że można pomnożyć odwrotnie: $B \cdot A$. Istotnie, macierz B ma 3 kolumny i macierz A ma 3 wiersze. A więc

KOLEJNOŚĆ MNOŻENIA MACIERZY MA ZNACZENIE!!!

A jak się mnoży macierze? Popatrzmy na rysunek:

Co będzie stało w zółtym kółku? Otóż będzie to suma $a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$. A w zielonym kółku? Tam będzie suma $a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23}$. Rozumiemy? Teraz dokładny algorytm:

- wynik mnożenia macierzy A rozm. $n{\times}k$ przez macierz B rozm. $k \times m$ to macierz C rozm. $n{\times}m$ (w przykładzie wyżej A rozm. $4{\times}2$ przez macierz B rozm. 2×3 daje macierz C rozm. $4{\times}3$).
- co stoi na współrzędnej c_{ij} macierzy C?
  - biorę wiersz i macierzy A i kolumnę j macierzy B (mają one tyle samo elementów, prawda?)
  - mnożę pierwszy element z wiersza i macierzy A, a więc a_{i1}, przez pierwszy element kolumny j macierzy B, a więc b_{1j}
  - mnożę drugi element z wiersza i macierzy A, a więc a_{i2}, przez drugi element kolumny j macierzy B, a więc b_{2j}
  - no i tak mnożę wszystkie odpowiadające sobie elementy wierszy i kolumn
  - wszystkie te iloczyny dodaję i to jest c_{ij}, a wiec:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}.$$

Zadanie 4. *Obliczyć iloczyn macierzy $A \cdot B$ jeżeli:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Czy wykonalny jest iloczyn macierzy $B \cdot A$?

Zadanie 5. *Obliczyć kwadrat macierzy:*

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ -i & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 6. *Obliczyć iloczyn macierzy:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

przez macierze:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

* * *

Wniosek z ostatniego zadania jest taki: mnożenie macierzy A przez kwadratową macierz diagonalną I_n (rozmiarów $n \times n$, w której na przekątnej są same jedynki sprawia, że w wyniku dostajemy tę samą macierz. Inaczej, dla dowolnej macierzy A rozmiarów $m \times n$ zachodzi wzór: $AI_n = A$. Ta ważna obserwacja dotycząca mnożenia macierzy jest punktem wyjścia do kolejnego ważnego przystanku na naszej matematycznej drodze :)

Prawdziwym celem, dla którego mówimy coś o mnozeniu macierzy jest wyznaczanie tzw. **macierzy odwrotnej** do macierzy kwadratowej X. Takie cudo oznaczamy przez X^{-1}. Co to jest? Otóż jeśli macierz X była rozmiarówn $n \times n$, to również X^{-1} jest to macierz rozmiarów $n \times n$, ale zachodzi warunek:

$$X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I_n.$$

Pierwszym składnikiem jest tzw. operacja **transponowania macierzy**. Jest to bardzo prosta sprawa. Mówimy, że A^T jest macierzą transponowaną macierzy A, jeśli wszystkie wiersze macierzy A stają się kolumnami macierzy A^T, podobnie kolumny A stają się wierszami w A^T.

Przykłady. Rozważmy macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Wówczas macierze transponowane są postaci:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

* * *

Druga operacja jest bardziej kłopotliwa i nazywa się operacją **dopełnienia algebraicznego** A^D macierzy A. Co to takiego? Niedawno liczyliśmy tzw. wartości pomocnicze dla każdego elementu macierzy. Był to iloczyn trzech liczb WP_{ij}

- elementu a_{ij} macierzy
- liczby $(-1)^{i+j}$
- wyznacznika $\det(A_{ij})$ macierzy powstałej przez usunięcie z A wiersza i oraz kolumny j

Teraz będziemy mówili o **dopełnieniu algebraicznym** elementu a_{ij}. Co to takiego? Otoż mnożymy przez siebie tylko dwie ostatnie z wymienionych wyżej liczb. A więc:

$$MWP_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}).$$

A co to jest macierz dopełnień algebraicznych macierzy kwadratowej A? Otóż **każdy element zastępujemy jego dopełnieniem algebraicznym.**

Na przykład macierz dopełnień algebraicznych macierzy:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jest to:

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}.$$

No i teraz wreszcie **wzór na macierz odwrotną macierzy kwadratowej X, o ile istnieje**:

$$X^{-1}=\frac{1}{\det(X)}\cdot(X^D)^T.$$

Ważna zasada: jeśli wyznacznik macierzy równy jest 0, wtedy nie ma macierzy odwrotnej. A więc kolejność jest taka:

- liczymy wyznacznik $\det(X)$ i jeśli wychodzi on $\neq 0$, to idziemy do następnego kroku
- liczymy macierz dopełnień algebraicznych
- transponyjemy macierz X^D i liczymy iloczyn $X^{-1}=\frac{1}{\det(X)}\cdot(X^D)^T$.

Zadanie 7. *Policzyć macierze odwrotne do macierzy:*

$$\begin{pmatrix}-1&2\\1&4\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&0\\2&-1&2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\-2&1&2\end{pmatrix}.$$

Układy równań - metoda macierzowa. Podamy teraz zastosowanie macierzy odwrotnej do rozwiązania układu n równań z n niewiadomymi. Przypomnijmy, że znamy już jedną metodę – wzory Cramera, oraz znamy metodę tw. Kroneckera-Capellego (ale ona dotyczy raczej sytuacji, gdy jest mniej równań niż niewiadomych). Rozważmy taki przykład:

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3 &=1\\ 2x_1-4x_2+x_3 &=0\\ x_2-x_3 &=-1\end{cases}.$$

Rozważmy następujący iloczyn macierzy:

$$\begin{pmatrix}1&1&-3\\2&-4&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Co to za macierze? Jedna z nich to macierz współczynników układu, a druga to macierz z niewiadomymi. Jak przemnożymy, wychodzi nam:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Widzimy więc, że nasz układ równań można zapisać w postaci równania macierzowego $AX = B$, gdzie A to macierz 3×3 ze współczynnikami, X to macierz 3×1 z niewiadomymi oraz B to macierz 3×1 z wyrazami wolnymi. Chcemy wyznaczyć X. Co byśmy normalnie zrobili? Podzielili stronami przez A, prawda? Ale macierzy się nie dzieli. No, ale gdyby istniała macierz A^{-1}, to moglibyśmy pomnożyć stronami (z lewej strony) równanie macierzowe $AX = B$ i dostalibyśmy:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Ale co to jest macierz A^{-1}? Zgodnie ze wzorem jest to:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zatem iloczyn $X = A^{-1}B$ równy jest:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Rozwiązaniami są więc: $x_1 = -14, x_2 = -9, x_3 = -8$.

A teraz ogólnie. **Kolejne kroki w metodzie macierzowej.**

- Biorę układ równań:

- tworzę z niego równanie macierzowe $AX = B$, gdzie A to macierz współczynników, X to macierz z niewiadomymi, a B to macierz wyrazów wolnych.
- próbuję odwrócić macierz A. Jeśli się uda, to wykonuję iloczyn $A^{-1}B$
- rozwiązaniami układu równań są liczby w macierzy $A^{-1}B$ (ma ona zawsze tylko jedną kolumnę).

Zadanie 8. *Stosując metodę macierzową rozwiązać układ równań:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}.$$

Jeśli wystarczy czasu opowiemy sobie też o równaniach macierzowych.