# Ćwiczenia V. Operacje na macierzach

Matematyka dla Geologii. Grupa 7.

Na poprzednich zajęciach zajmowaliśmy się liczeniem rzędu macierzy i rozwiązywaniem układów równań.

**Zadanie 1** (Zadanie 2.19)**.** *Rozwiąż układ równań:*

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 5t = 1 \\ x + 2y - 3z + 7t = 1 \\ 3x - y - 2z + 2t = 4 \end{cases}$$

**Zadanie 2.** *Przeprowadzić dyskusję rozwiązywalności układu równań w zależności od parametru $m$:*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y - z = m \end{cases}$$

**Zadanie 3.** *Przeprowadź dyskusję rozwiązalności układu równań w zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + 3y + mz = 2 \end{cases} .$$

**Dodawanie i mnożenie macierzy - jak to się robi?**

**Dodawanie macierzy**.**Macierze wolno dodawać, gdy są one takich samych rozmiarów**. Wtedy suma ma takie same rozmiary jak każdy ze składników i:

Na każdej współrzędnej (i,j) macierzy A + B stoi suma:
współrzędnej (i,j) macierzy $A$ i współrzędnej (i,j) macierzy $B$.

Na przykład:

3+4=7

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

**Mnożenie macierzy.** Załóżmy, że:

- macierz $A$ ma $n_1$ rzędów i $m_1$ kolumn
- macierz $B$ ma $n_2$ rzędów i $m_2$ kolumn

Macierze $A$ i $B$ można pomnożyć tylko wtedy, gdy $m_1 = n_2$, a więc:

**macierze można pomnożyć wtedy i tylko wtedy, gdy**

**ilość kolumn pierwszej macierzy jest taka sama jak ilość wierszy drugiej macierzy**

.

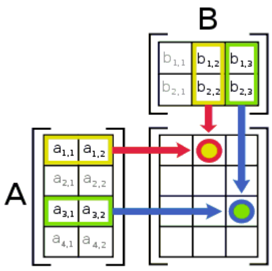
Dla przykładu, nie istnieje iloczyn $A \cdot B$ macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

bo liczba kolumn w macierzy $A$ to 4, a liczba wierszy w $B$ to 2. Zauważmy jednak, że można pomnożyć odwrotnie: $B \cdot A$. Istotnie, macierz $B$ ma 3 kolumny i macierz $A$ ma 3 wiersze. A więc

**KOLEJNOŚĆ MNOŻENIA MACIERZY MA ZNACZENIE!!!**

**A jak się mnoży macierze?** Popatrzmy na rysunek:




Co będzie stało w żółtym kółku? Otóż będzie to suma $a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$. A w zielonym kółku? Tam będzie suma $a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23}$. Rozumiemy? Teraz dokładny algorytm:

- wynik mnożenia macierzy A rozm. $n \times k$ przez macierz $B$ rozm. $k \times m$ to macierz $C$ rozm. $n \times m$ (w przykładzie wyżej $A$ rozm. $4 \times 2$ przez macierz $B$ rozm. $2 \times 3$ daje macierz $C$ rozm. $4 \times 3$).
- co stoi na współrzędnej $c_{ij}$ macierzy $C$?
  - biorę wiersz $i$ macierzy $A$ i kolumnę $j$ macierzy $B$ (mają one tyle samo elementów, prawda?)
  - mnożę pierwszy element z wiersza $i$ macierzy $A$, a więc $a_{i1}$, przez pierwszy element kolumny $j$ macierzy $B$, a więc $b_{1j}$

– mnożę drugi element z wiersza $i$ macierzy $A$, a więc $a_{i2}$, przez drugi element kolumny $j$ macierzy $B$, a więc $b_{2j}$

– no i tak mnożę wszystkie odpowiadające sobie elementy wierszy i kolumn

– wszystkie te iloczyny dodaję i to jest $c_{ij}$, a wiec:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}.$$

**Zadanie 4.** *Obliczyć iloczyn macierzy $A \cdot B$ jeżeli:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

*Czy wykonalny jest iloczyn macierzy $B \cdot A$?*

**Zadanie 5.** *Obliczyć kwadrat macierzy:*

$$A=\begin{pmatrix}i & -1 & 0\\ -i & i & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

**Zadanie 6.** *Obliczyć iloczyn macierzy:*

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

*przez macierze:*

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

* * *

Wniosek z ostatniego zadania jest taki: mnożenie macierzy $A$ przez kwadratową macierz diagonalną $I_n$ (rozmiarów $n \times n$, w której na przekątnej są same jedynki sprawia, że w wyniku dostajemy tę samą macierz. Inaczej, dla dowolnej macierzy $A$ rozmiarów $m \times n$ zachodzi wzór: $AI_n = A$. Ta ważna obserwacja dotycząca mnożenia macierzy jest punktem wyjścia do kolejnego ważnego przystanku na naszej matematycznej drodze :)

Prawdziwym celem, dla którego mówimy coś o mnozeniu macierzy jest wyznaczanie tzw. **macierzy odwrotnej** do macierzy kwadratowej $X$. Takie cudo oznaczamy przez $X^{-1}$. Co to jest? Otóż jeśli macierz $X$ była rozmiarówn $n \times n$, to również $X^{-1}$ jest to macierz rozmiarów $n \times n$, ale zachodzi warunek:

$$X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I_n.$$

Pierwszym składnikiem jest tzw. operacja **transponowania macierzy**. Jest to bardzo prosta sprawa. Mówimy, że $A^T$ jest macierzą transponowaną macierzy $A$, jeśli wszystkie wiersze macierzy $A$ stają się kolumnami macierzy $A^T$, podobnie kolumny $A$ stają się wierszami w $A^T$.

Przykłady. Rozważmy macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Wówczas macierze transponowane są postaci:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

* * *

Druga operacja jest bardziej kłopotliwa i nazywa się operacją **dopełnienia algebraicznego** $A^D$ macierzy $A$. Co to takiego? Niedawno liczyliśmy tzw. wartości pomocnicze dla każdego elementu macierzy. Był to iloczyn trzech liczb $WP_{ij}$

- elementu $a_{ij}$ macierzy
- liczby $(-1)^{i+j}$
- wyznacznika $\det(A_{ij})$ macierzy powstałej przez usunięcie z $A$ wiersza $i$ oraz kolumny $j$

Teraz będziemy mówili o **dopełnieniu algebraicznym** elementu $a_{ij}$. Co to takiego? Otoż mnożymy przez siebie tylko dwie ostatnie z wymienionych wyżej liczb. A więc:

$$MWP_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}).$$

A co to jest macierz dopełnień algebraicznych macierzy kwadratowej $A$? Otóż **każdy element zastępujemy jego dopełnieniem algebraicznym.**

Na przykład macierz dopełnień algebraicznych macierzy:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jest to:

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

No i teraz wreszcie **wzór na macierz odwrotną macierzy kwadratowej $X$, o ile istnieje**:

$$X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} \cdot (X^D)^T.$$

Ważna zasada: jeśli wyznacznik macierzy równy jest 0, wtedy nie ma macierzy odwrotnej. A więc kolejność jest taka:

- liczymy wyznacznik $\det(X)$ i jeśli wychodzi on $\neq 0$, to idziemy do następnego kroku
- liczymy macierz dopełnień algebraicznych
- transponyjemy macierz $X^D$ i liczymy iloczyn $X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} \cdot (X^D)^T$.

**Zadanie 7.** *Policzyć macierze odwrotne do macierzy:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Układy równań - metoda macierzowa.** Podamy teraz zastosowanie macierzy odwrotnej do rozwiązania układu $n$ równań z $n$ niewiadomymi. Przypomnijmy, że znamy już jedną metodę – wzory Cramera, oraz znamy metodę tw. Kroneckera-Capellego (ale ona dotyczy raczej sytuacji, gdy jest mniej równań niż niewiadomych). Rozważmy taki przykład:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 & = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = -1 \end{cases}.$$

Rozważmy następujący iloczyn macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Co to za macierze? Jedna z nich to macierz współczynników układu, a druga to macierz z niewiadomymi. Jak przemnożymy, wychodzi nam:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Widzimy więc, że nasz układ równań można zapisać w postaci równania macierzowego $AX = B$, gdzie $A$ to macierz $3 \times 3$ ze współczynnikami, $X$ to macierz $3 \times 1$ z niewiadomymi oraz $B$ to macierz $3 \times 1$ z wyrazami wolnymi. Chcemy wyznaczyć $X$. Co byśmy normalnie zrobili? Podzielili stronami przez $A$, prawda? Ale macierzy się nie dzieli. No, ale gdyby istniała macierz $A^{-1}$, to moglibyśmy pomnożyć stronami (z lewej strony) równanie macierzowe $AX = B$ i dostalibyśmy:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Ale co to jest macierz $A^{-1}$? Zgodnie ze wzorem jest to:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zatem iloczyn $X = A^{-1}B$ równy jest:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Rozwiązaniami są więc: $x_1 = -14, x_2 = -9, x_3 = -8$.

A teraz ogólnie. **Kolejne kroki w metodzie macierzowej.**

- Biorę układ równań:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

- tworzę z niego równanie macierzowe $AX = B$, gdzie $A$ to macierz współczynników, $X$ to macierz z niewiadomymi, a $B$ to macierz wyrazów wolnych.
- próbuję odwrócić macierz $A$. Jeśli się uda, to wykonuję iloczyn $A^{-1}B$
- rozwiązaniami układu równań są liczby w macierzy $A^{-1}B$ (ma ona zawsze tylko jedną kolumnę).

**Zadanie 8.** *Stosując metodę macierzową rozwiązać układ równań:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} .$$

Jeśli wystarczy czasu opowiemy sobie też o równaniach macierzowych.