Ćwiczenia IV. Układy równań

Matematyka dla Geologii. Grupa 7.

Na poprzednich zajęciach mówiliśmy o macierzach kwadratowych, ich wyznacznikach, oraz o metodzie Cramera. Na początku zatem przypomnienie:

Zadanie 1. *Policzyć wyznaczniki:*

$$\begin{vmatrix} \frac{i+1}{3} & \frac{i+2}{3} \\ \frac{i-2}{3} & \frac{i-1}{3} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 100 & -2 & 3 \\ 200 & 1 & 5 \\ -300 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

W ostatnim przykładzie korzystamy z następującej zasady: jeśli wszystkie elementy w pewnym wierszu lub kolumnie są wielokrotnościami pewnej liczby, to możemy tę liczbę „wyciągnąć" przed wyznacznik. W podanym przykładzie:

$$\begin{vmatrix} 100 & -2 & 3 \\ 200 & 1 & 5 \\ -300 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \cdot 1 & -2 & 3 \\ 100 \cdot 2 & 1 & 5 \\ 100 \cdot (-3) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 2 (Zadanie 2.3 ze zbioru)**.** *Znaleźć wyznacznik przy pomocy rozwinięcia Laplace'a (suma wartości pomocniczych z wiersza lub kolumny).*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Zadanie 3 (Zadanie 2.4 ze zbioru)**.** *Stosując wzory Cramera rozwiązać układ równań:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = -4 \end{cases}$$

<u>**Minory macierzy. Rząd macierzy**</u>

Do tej pory pracowaliśmy jedynie z macierzami kwadratowymi, a więc takimi, które miały tyle samo wierszy, co kolumn. Teraz zajmiemy się macierzami dowolnych rozmiarów. Po pierwsze omówimy dokładniej pojęcie <u>**minora macierzy**</u>.

Powiemy, że **macierz kwadratowa** X **leży w macierzy** A, jeśli X powstaje przez usunięcie z A pewnej ilości wierszy lub kolumn. Dla przykładu:

- macierz $X = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ powstaje przez usunięcie 2. i 3. wiersza oraz 1. kolumny macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- macierz $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ nie leży w macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

  bo nie da się dostać X przez usunięcie z A pewnych wierszy i kolumn

- macierz $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ nie leży w macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Powiemy, że **liczba x jest minorem stopnia n macierzy A** jeśli

$$x = \det X,$$

gdzie X jest macierzą $n \times n$ leżącą w A. A więc innymi słowy: minory stopnia n to wyznaczniki wszystkich macierzy kwadratowych rozmiaru $n \times n$, które leżą w A.

Dla przykładu, biorąc macierz A rozmiarów 3×4 postaci widzimy, że wszystkimi jej minorami stopnia 3 są wyznaczniki macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozważmy wszystkie macierze rozmiarów 3×3, które „leżą” w macierzy A. Są to macierze, które powstają z A przez usunięcie jednej kolumny.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -1 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Wyznaczniki macierzy kwadratowych rozmiaru 3 leżących w A nazwiemy minorami stopnia 3 macierzy A.

A przykłady minorów stopnia 2? Są to wyznaczniki wszystkich macierzy kwadratowych 2×2 leżących w A. Nie będziemy pisać wszystkich, ale kilka przykładów:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{smallmatrix}\right), \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right), \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right).$$

Tak samo określamy minory stopnia 1: są to po prostu wyznaczniki wszystkich macierzy 1×1, a więc wszystkie współczynniki w A. Gdyby macierz była większych rozmiarów, to oczywiście mogłyby istnieć minory stopnia 4, lub 5 itd.

Rząd macierzy. Weźmy macierz M o n wierszach i m kolumnach i załóżmy, że $x = \min(n, m)$
np. $n = 3, m = 5$, to $x = \min(3, 5) = 3$;
np. $n = 8, m = 7$, to $x = \min(8, 7) = 7$;
np. $n = 3, m = 3$, to $x = \min(3, 3) = 3$). Wówczas:

- (Krok 1) liczymy minory stopnia x – jeśli któryś jest $\neq 0$, to mówimy, że rząd r(M) wynosi x
  jeśli wszystkie minory stopnia x to 0, idziemy do następnego kroku
- (Krok 2) liczymy minory stopnia x-1 – jeśli któryś jest $\neq 0$, to mówimy, że rząd r(M) wynosi x-1
  jeśli wszystkie minory stopnia x-1 to 0, idziemy do następnego kroku
- i tak dalej...
- (Krok x-1) liczymy minory stopnia 1 – jeśli któryś jest $\neq 0$, to mówimy, że rząd r(M) wynosi 1
  jeśli wszystkie minory stopnia x to 0, to mówimy, że $r(M) = 0$.

Inaczej mówiąc, **rząd r(A) macierzy A jest to rozmiar największej macierzy kwadratowej, która leży w A i ma niezerowy wyznacznik**.

Przykład: wróćmy do macierzy

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Jest to macierz rozmiarów $n = 3, m = 4$, a więc $x = \min(3,4) = 3$. Liczymy rząd:

- (Krok 1) liczymy minory stopnia 3, a więc wyznaczniki wszystkich macierzy rozmiarów 3×3, które leżą w M:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -1 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

  Gdyby któryś z wyznaczników tych 4 macierzy 3×3 był $\neq 0$, wówczas rząd M byłby równy 3. Ale akurat wszystkie minory wynoszą 0. A więc $r(M) < 3$ No to idziemy do kroku 2.

- (Krok 2) liczymy minory stopnia 2. Nie musimy liczyć wszystkich, wystarczy znaleźc jakiś, który jest $\neq 0$. Zauważmy, że biorąc jeden z minorów podanych w przykładzie widzimy, że wyznacznik macierzy $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ równy jest 0. Ale biorąc inny minor stopnia 2, na przykład wyznacznik drugiej z macierzy podanych w przykładzie $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ widzimy, że jest on równy $12 - 8 = 4 \neq 0$. A więc macierz M ma rząd 2. Nie musimy wykonywać następnego kroku.

Zadanie 4. *Wyznaczyć rząd macierzy:*

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & -8 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Po co jest rząd? Nauczymy się dzięki niemu rozwiązywać układy równań, których nie da się zrobić wzorami Cramera. Tamta metoda zakładała, że jest tyle samo niewiadomych co równań. Dodatkowo właściwie niewiele umieliśmy powiedzieć w przypadku, gdy było „nieskończenie wiele rozwiązań". Teraz to uściślimy.

Metoda dyskusji rozwiązywalności układu równań - tw. Kroneckera-Capellego

Załóżmy, że mamy układ n równań o m niewiadomych (niekoniecznie tyle równań, co niewiadomych!):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

Są trzy możliwe charakterystyki rozwiązalności tego układu:

- jest dokładnie jedno rozwiązanie - tzw. **układ oznaczony**
- jest nieskończenie wiele rozwiązań - tzw. **układ nieoznaczony**
- nie ma rozwiązań - tzw. **układ sprzeczny**

Jak odróżnić te sytuacje w ogólnym przypadku i jakich zadań możemy się spodziewać? Z naszym układem wiążemy dwie macierze: macierz współczynników A tego układu i macierz rozszerzoną A_r tego układu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}.$$

I teraz gwóźdź programu. Twierdzenie Kroneckera-Capellego mówi, że:

- jeśli $r(A) < r(A_r)$, to układ jest sprzeczny
- jeśli $r(A) = r(A_r) =$ ilość niewiadomych $-$ n , to układ jest oznaczony i stosujemy wzory Cramera
- jeśli $r(A) = r(A_r) =$ ilość niewiadomych $-$ konkretna liczba , to rozwiązań jest nieskończenie wiele i zależą one od „konkretnej liczby" parametrów.

Przykłady:

(a)

$$\begin{cases} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{cases}$$

Mamy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zatem $r(A) = r(A_r) = 2$. Mamy więc jedno rozwiązanie (wzory Cramera)

(b)

$$\begin{cases} x + y & = 2 \\ 2x + 2y & = 4 \end{cases}$$

Mamy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Zatem $r(A) = r(A_r) = 1 = 2 - 1$, a wiec jest nieskończenie wiele rozwiązań, które zależą od jednego parametru. Istotnie, dla każdego $a \in \mathbb{R}$ każda para $(x, y) = (a, 2 - a)$ spełnia ten układ równań.

(c)

$$\begin{cases} x + y + z & = 3 \\ 2x + 2y + 2z & = 6 \end{cases}$$

Mamy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Zatem $r(A) = r(A_r) = 1 = 3 - 1$, a wiec jest nieskończenie wiele rozwiązań, które zależą od dwóch parametrów! Istotnie, dla każdych $a, b \in \mathbb{R}$ każda trójką $(x, y, z) = (a, b, 3 - a - b)$ spełnia ten układ równań.

(d)

$$\begin{cases} x + y & = 2 \\ x + y & = 1 \end{cases}$$

Mamy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zatem $r(A) = 1, r(A_r) = 2$, zatem układ jest sprzeczny.

Przykład. Mamy układ 2 równań z 3 niewiadomymi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases} .$$

Z nim wiążą się dwie macierze: macierz współczynników A i macierz A_r postaci:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Wykreślenie z macierzy A drugiej kolumny pozwala uzyskać niezerowy minor stopnia 2. Istotnie, macierz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ ma wyznacznik równy -1. Tak samo po usunięciu z macierzy A_r drugiej i czwartej kolumny. Zatem $r(A) = r(A_2) = 2$. Mamy 3 niewiadome, a więc „konkretna liczba” $= 1$. Jest nieskończenie wiele rozwiązań. I teraz jak się to opisuje? Otóż:

- Bierzemy minor macierzy A, który okazał się $\neq 0$ i patrzymy na wiersze i kolumny, które usuwaliśmy przy liczeniu tego minoru
  W naszym przykładzie jest to kolumna 2.
- Patrzymy na niewiadome o numerach wskazanych w punkcie pierwszym wierszy i kolumn.
  W naszym przykładzie niewiadoma x_2, bo usuwaliśmy drugą kolumnę.
- Przenosimy wskazane niewiadome ją na prawą stronę układu równań i traktujemy je jako parametry.
  W naszym przykładzie bierzemy $x_2 = a$, $a \in \mathbb{R}$ i dostajemy zatem układ:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 - 2a \\ 2x_1 - 3x_3 = 2 - 4a \end{cases}$$

  To już jest normalny układ równań (tyle samo zmiennych, co niewiadomych) który rozwiązujemy wzorami Cramera:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad W_{x_1} = \begin{vmatrix} 1-2a & -1 \\ 2-4a & -3 \end{vmatrix} = -1 + 2a, \quad W_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1-2a \\ 2 & 2-4a \end{vmatrix} = 0.$$

  Stąd $x_1 = \frac{W_{x_1}}{W} = 1 - 2a, x_3 = \frac{W_{x_3}}{W} = 0$. Rozwiązań jest zatem nieskończenie wiele i są opisane, w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, wzorami:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2a \\ x_2 = a \\ x_3 = 0 \end{cases}, \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}.$$

A więc jeszcze raz cała **metoda rozwiązywania układów równań**:

- tworzymy macierze współczynników A i rozszerzoną A_r, liczymy ich rzędy
- jeśli $r(A) \neq r(A_r)$, to układ jest sprzeczny, jeśli $r(A) = r(A_r)$, to idziemy dalej
- jeśli $r(A)$ równy jest liczbie niewiadomych, to jest jedno rozwiązanie i stosujemy wzory Cramera

- jeśli $r(A)$ jest mniejszy od liczby niewiadomych, to patrzymy na minor w A, który okazał się niezerowy i wskazujemy numery wierszy i kolumn, które trzeba było usunąć z A, aby go uzyskać
- niewiadome o numerach usuniętych z tego minora kolumn i wierszy przenosimy na prawą stronę i traktujemy jako parametry
- stosujemy metodę Cramera (rozwiązania wyjdą w zależności od parametrów)

Zadanie 5 (Zadanie 2.19)**.** *Rozwiąż układy równań:*

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 5t = 1 \\ x + 2y - 3z + 7t = 1 \\ 3x - y - 2z + 2t = 4 \end{cases}$$

Zadanie 6. *Przeprowadź dyskusję rozwiązalności układu równań w zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + 3y + mz = 2 \end{cases}.$$