Ćwiczenia III. Wyznacznik macierzy

Matematyka dla Geologii. Grupa 7.

Zanim zaczniemy mówić o wyznacznikach krótka powtórka z otatniego tygodnia:

Zadanie 1. *Wyznacz postać trygonometryczną liczby:* $-i^7 + i^2$.

Zadanie 2. *Wyznacz postać trygonometryczną liczby* $(1+i)^{10}$

* * *

Zaczniemy od metody liczenia wyznaczników dla macierzy 2×2 oraz 3×3.

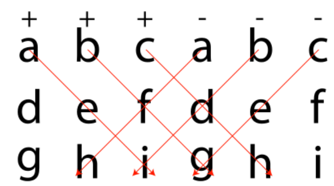
Wyznacznik macierzy 2x2 liczymy wg następującego wzoru:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Wyznacznik macierzy 3x3 liczymy **Metodą Sarrusa**, która polega na dopisaniu obok macierzy o wyrazach:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & h \end{pmatrix}$$

jeszcze jednej takiej samej i wykonaniu 6 mnożeń liczb zgodnie z liniami, które zaznaczono na rysunku



aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg

A czym jest wyznacznik? Jest to suma liczb mnożonych z lewej do prawej minus suma liczb mnożonych z prawej do lewej.

Zadanie 3. *Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy:*

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & -8 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2i & 3 \\ 2 & 4i & 6 \\ 3 & i & -2 \end{pmatrix}$

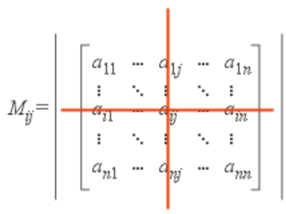
Widzimy, że w pewnych przypadkach wychodził nam wyznacznik zero. Było tak zawsze wtedy, gdy wiersz lub kolumna miał same zera, a w ostatnim przykładzie także wtedy, gdy współczynniki odpowiednich wierszy (lub kolumn) są do siebie proporcjonalne.

* * *

Na ostatnim wykładzie mówiliśmy o macierzach, a więc o tablicach $n \times m$, w które wpisujemy liczby (rzeczywiste, zespolone...). Podstawową umiejętnością jest liczenie wyznacznika macierzy kwadratowej, a więc takiej, gdzie ilość wierszy równa się ilości kolumn. Jest ogólna metoda i jej przyjrzymy się na początek.

Liczenie wyznacznika przez rozwinięcie Laplace'a

Jeśli spojrzymy na dowolny element macierzy, to możemy wyróżnić elementy macierzy, które nie leżą w tym samym wierzu i kolumnie co ten element.



Dla przykładu w macierzy:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 8 & 11 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

mogę wybrać element z drugiego wiersza i drugiej kolumny: a więc 11 i mam pewien zbiór elementów, które nie leżą w tym samym wierszu i kolumnie co on (na zielono)

$$\begin{pmatrix} \color{green}{2} & 4 & \color{green}{0} & \color{green}{-2} \\ 8 & \color{red}{11} & -2 & 1 \\ \color{green}{0} & 0 & \color{green}{3} & \color{green}{1} \\ \color{green}{1} & 2 & \color{green}{4} & \color{green}{-11} \end{pmatrix}$$

Elementy te można ustawić w osobną macierz 3x3, nazwiemy ją (na cześć brakującego jej 2 wiersza i 2 kolumny macierzy M) macierzą M_{22}:

$$M_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

W taki sam sposób mogę z macierzy M zrobić macierze M_{13}, M_{33}, M_{42} itd. Te, które wymieniłem mają postać:

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -11 \end{pmatrix}, \quad M_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 8 & 11 & 1 \\ 1 & 2 & -11 \end{pmatrix}, \quad M_{42} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 8 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oczywiście mogę zmienić macierz, dodać więcej rzędów i kolumn, i zawsze będę wiedział jak z macierzy N zrobić macierz N_{xy}. Po prostu usuwam wiersz x i kolumnę y. Takie wyznaczniki macierzy z usuniętymi (jednym lub więcej) wierszami i kolumnami nazywa się **minorami** w M i są one bardzo ważne. Pojęcie to omówimy bardziej szczegółowo na następnych zajęciach.

Biorę teraz element z wiersza k i kolumny m. Nazywam go a_{km}. Z tym elementem macierzy M mogę skojarzyć „wartość pomocniczą” W_{km}, czyli iloczyn trzech liczb:

- $(-1)^{k+m}$ – a więc biorę sumę numeru wiersza i kolumny – podnoszę -1 do otrzymanej sumy
- a_{km} – a więc sam element z wiersza k i kolumny m
- $\det(M_{km})$ – a więc wyznacznik macierzy M, z której usunąłem wiersz k i kolumnę m. Innymi słowy - minor M_{km} Nie wiem ile to jest? Na razie to nie szkodzi. Ważne, ze minor to wyznacznik macierzy mniejszej od wyjściowej, więc teoretycznie – jej wyznacznik „łatwiej” policzyć.

A więc wartość pomocnicza to: $W_{km} = (-1)^{k+m} a_{km} M_{km}$.

Zadanie 4. *Wyznacz wartości pomocnicze dla wszystkich elementów trzeciego wiersza macierzy (a więc $W_{31}, W_{32}, W_{33}, W_{34}$)*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & i & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 5. *Wyznacz wartości pomocnicze dla wszystkich elementów pierwszej kolumny macierzy: (a więc $W_{11}, W_{21}, W_{31}, W_{41}$)*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & i & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Algorytm obliczania wyznacznika macierzy M ma dwie opcje.

- Biorę dowolny wiersz i dodaje do siebie wszystkie wielkości pomocnicze z tego wiersza. Wynik to wyznacznik.
- Biorę dowolną kolumnę i dodaję do siebie wszystkie wartości pomocnicze z tej kolumny. Wynik to wyznacznik.

Zadanie 6. *Oblicz wyznacznik macierzy danych w Zadaniach 4 i 5*

Na macierzy można wykonywać pewne operacje, które nie zmieniają wyznacznika. Należą do nich:

- dodanie do jednego wiersza wielokrotności drugiego wiersza (a więc także dodawanie i odejmowanie wierszy) – niekoniecznie sąsiedniej!
- dodanie do jednej kolumny wielokrotności drugiej kolumny (a więc także dodawanie i odejmowanie kolumn) – niekoniecznie sąsiedniej!

* * *

Rozwiązywanie układów równań - metoda Cramera

Załóżmy, że mamy układ n równań o n niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ postaci:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Zasada jest taka: najpierw wpisujemy wszystkie współczynniki a_{ij} stojące w układzie równań w macierz i liczymy wyznacznik, który nazwiemy liczbą W:

$$det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Potem robimy tak: patrzymy na pierwszą niewiadomą: x_1. W układzie równań stoją przy niej współczynniki $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ (w kolejnych równaniach). Teraz tworzymy macierz taką jak wyżej, ale w pierwszej kolumnie zamiast liczb $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ wpisujemy liczby $b_1, b_2, \dots, b_n$ i liczymy wyznacznik W_1 postaci:

$$det\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Podobnie liczymy wyznacznik W_2 macierzy współczynników, gdzie drugą kolumnę podmieniliśmy przez wyrazy wolne:

$$det\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

W ten sposób liczymy n wyznaczników $W_1, W_2, \dots, W_n$ postaci:

$$det\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \end{vmatrix} \qquad det\begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} & \begin{matrix} \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{2n} \\ \ddots & \vdots \\ \dots & a_{nn} \end{matrix} \end{vmatrix} \quad \dots \quad det\begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

Zasada mówi, że na zagadnienie układu równań można odpowiedzieć na 3 sposoby:

- **układ ma dokładnie jedno rozwiązanie**: jest tak wtedy, gdy W (wyznacznik ze współczynników) jest różny od 0. Wówczas rozwiązanie to:

$$x_1 = \frac{det\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \; x_2 = \frac{det\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \; \dots \; x_n = \frac{det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

- **układ ma nieskończenie wiele rozwiązań**: jest tak wtedy, gdy zarówno W, jak i wszystkie pozostałe $W_1, W_2, \dots, W_n$ są równe 0

- **układ nie ma rozwiązań:** jest tak wtedy, gdy $W = 0$, zaś jeden z elementów $W_1, W_2, \dots, W_n$ nie jest równy 0.

Zobaczmy dla przykładu trzy układy równań:

$$\begin{cases} x+y & = 2 \\ x-y & = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y & = 2 \\ 2x+2y & = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y & = 2 \\ x+y & = 1 \end{cases}$$

- W przypadku pierwszego układu mamy następujące wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

  A więc: $W = -2, W_1 = -2, W_2 = -2$, czyli $x = W_1/W = 1, y = W_2/W = 1$. Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie.

- W przypadku drugiego układu mamy następujące wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

  A więc: $W = 0, W_1 = 0, W_2 = 0$, czyli układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

- W przypadku trzeciego układu mamy następujące wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A więc: $W = 0, W_1 = 1, W_2 = -1$, czyli układ nie ma rozwiązań.