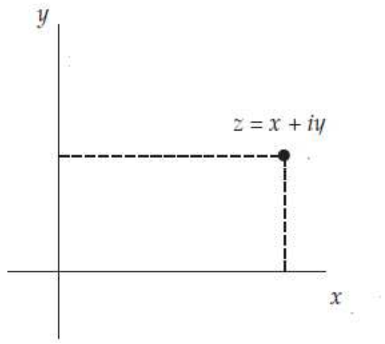
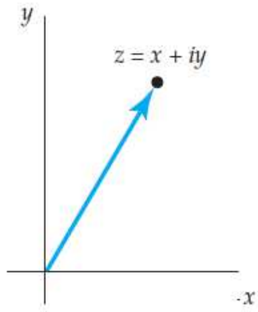
Ćwiczenia II. Liczby zespolone po raz drugi.

Matematyka dla Geologii. Grupa 7.

Dodawanie i mnożenie. Zbiory liczb zespolonych.

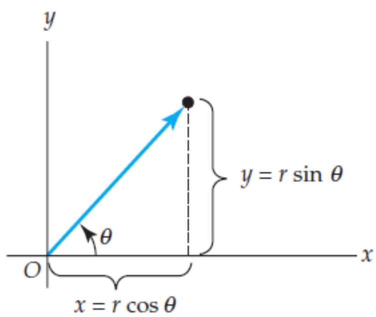
Przypomnijmy interpretację geometryczną liczby zespolonej:





Liczbę zespoloną $z = x + yi$ można traktować jako punkt (x, y). Możemy też myśleć o niej jako o wektorze o początku w początku układu współrzędnych i końcu w punkcie (x, y). Obydwie te interpretacje są przydatne.

Mówiliśmy też o postaci trygonometrycznej liczby zespolonej. Na płaszczyźnie zespolonej jest to:



Wyrażając tę postać wzorem pisaliśmy, że:

$$z = |z| \left(\cos(\arg(z)) + \sin(\arg(z))i\right).$$

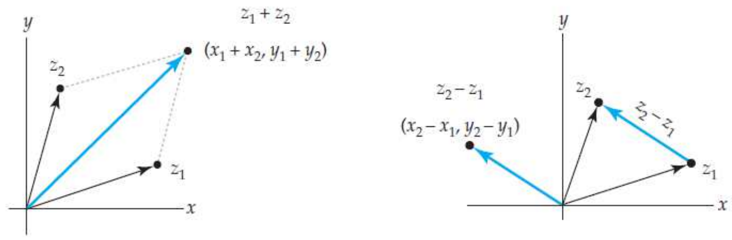
Przypomnijmy, że moduł $|z|$ liczby zespolonej, to odległość tej liczby od punktu (0,0), zaś argument liczby z to kąt (liczony z dokładnością do $360°$) jaki tworzy prosta OX z odcinkiem Oz. Naszym celem będzie wykorzystanie tych informacji i powiedzenie sobie kilku słów o rysowaniu zbiorów na płaszczyźnie zespolonej. Na początku jednak pewne przypomnienie.

Zadanie 1. *Znajdź część rzeczywistą i urojoną liczby*

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}.$$

Zadanie 2. *Znajdź moduł, postać trygonometryczną i argument liczby* $12 - 12i$*.*

A teraz nowa rzecz: **dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych na płaszczyźnie**. Operacje te są podobne jak dodawanie i odejmowanie wektorów (było na fizyce?) – dlatego interpetacja liczby zespolonej jako wektor ma znaczenie:



Po co nam coś takiego? Otóż na kolokwiach i egzaminie trzeba będzie rysować zbiory liczb zespolonych. I to będzie jedno z dwóch naszych zajęć dzisiaj. Weźmy pierwszy przykład:

Zadanie 3. *Narysuj zbiór liczb zespolonych spełniających równanie:*

a) $|z| = 2$

b) $|z + 1| = 2$

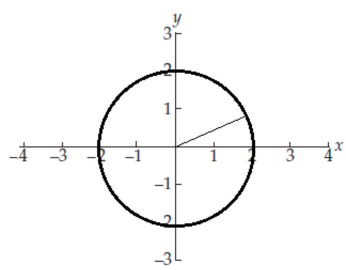
c) $|z - 1| = 2$

d) $|z + i| = 2$

e) $|z - i| = 2$

f) $|z + i + 1| = 2.$

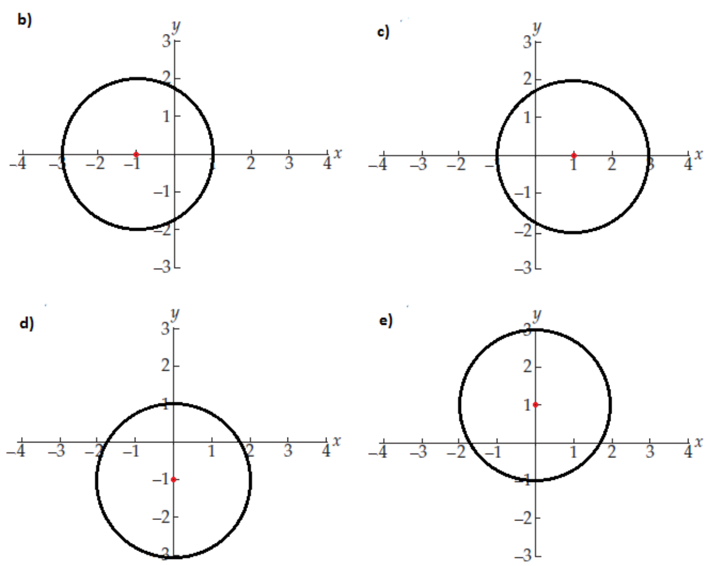
Pierwszy zbiór łatwo jest narysować. Jest to okrąg o środku (0,0) i promieniu 2. Zgadza się? Bo $|z| = 2$ oznacza, że rysujemy wszystkie liczby zespolone o module 2, a więc wszystkie liczby zespolone, które są odległe o 2 od punktu (0,0).



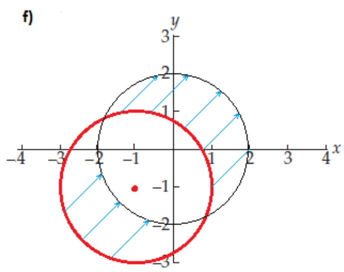
A jak narysować pozostałe zbiory? Otóż tu przydaje się nam definicja. Weźmy przykład

$$b)|z+1| = 2.$$

Oznacza on takie liczby z, że jak dodam do nich (liczbę zespoloną 1), to otrzymam same liczby zespolone o module 2. Inaczej: jak do każdego punktu zbioru, którego szukam dodam 1, to otrzymam to kółko, co mam na górze! A więc to jasne, że zbiór $|z+1| = 2$ to też okrąg, ale o środku w punkcie $(-1, 0)$. Istotnie, jak dodam do liczby zespolonej $(-1, 0)$ liczbę zespoloną $(1, 0)$, to dostanę $(0, 0)$. Zobaczmy jak wyglądają odpowiedzi w punktach b), c), d), e).



A jak wygląda odpowiedź do punktu f)? Tym razem szukamy takich liczb zespolonych, że jeśli dodamy do nich 1 + i, to wyjdzie wyjściowy okrąg o promieniu 2. Ale dodanie liczby 1 + i to to samo, co dodanie wektora (1,1) na płaszczyźnie. Zatem odpowiedź ma postać:



Przyjrzyjmy się raz jeszcze. Szukany okrąg jest na czerwono. Są to liczby z. Jak do każdej z nich dodamy $i+1$, do wpadniemy na okrąg złożony z liczb zespolonych o module 2.

Wniosek 1. *Równanie* $|x - z_1| = r$ *opisuje okrąg o środku w punkcie* z_1 *i promieniu* r*.*

Zadanie 4. *Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb spełniające:*

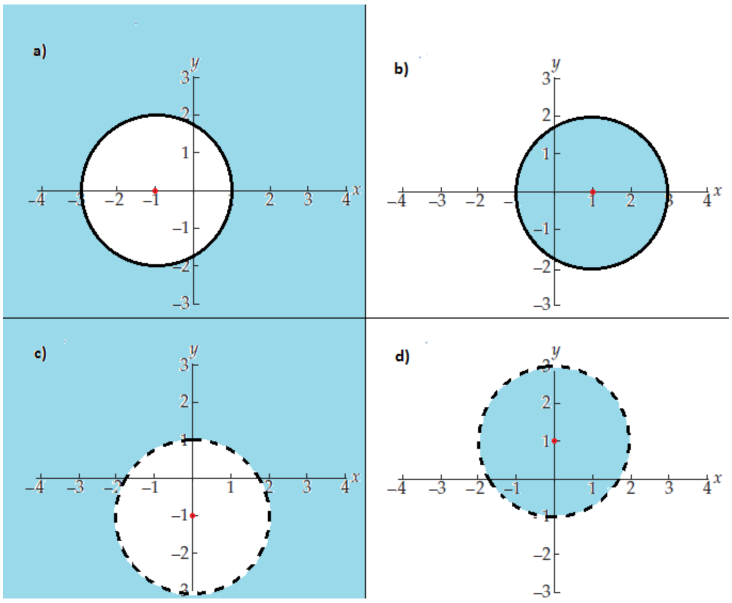
a) $|z+1| \geqslant 2$

b) $|z-1| \leqslant 2$

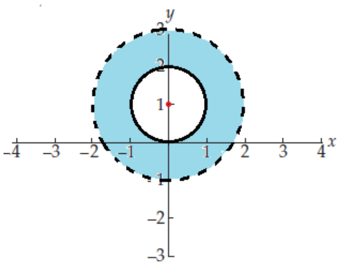
c) $|z+i| > 2$

d) $|z-i| < 2$

Tak naprawdę wystarczy teraz pokolorować odpowiednio: punkty wewnątrz lub na zewnątrz okręgu. UWAGA: jeśli jest znak „$\leqslant$" lub „$\geqslant$", to do szukanego zbioru punktów wlicza się także sam okrąg. A jeśli nierówność jest ostra, to nie wlicza się. Odpowiedź:



A jeśli trzeba będzie narysować zbiór liczb postaci: $2 > |z-i| \geqslant 1$? No to będzie to część wspólna zbiorów $2 > |z-i|$ oraz $|z-i| \geqslant 1$. Każdy z nich umiemy narysować. Rezultatem będzie pierścień:



Ogólna metoda rysowania jest taka: wszędzie gdzie występuje liczba z wstawiamy $z = x + yi$. Dla przykładu: w narysowanym już przez nas zbiorze $|z+i| > 2$ wstawiamy zamiast z liczbę $x + yi$. Dostajemy:

$$|x + yi + i| > 2 \Leftrightarrow |x + (y+1)i| > 2.$$

Korzystając ze wzoru na moduł liczby zespolonej dostajemy:

$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} > 2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 > 4.$$

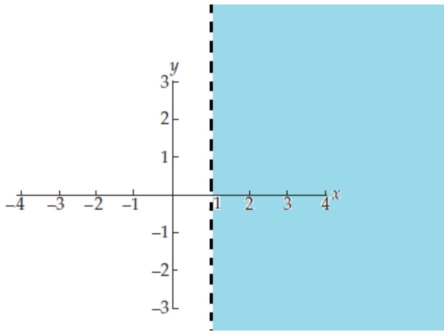
I teraz wystarczy przypomnieć sobie, że równanie:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

opisuje na płaszczyźnie okrąg o środku (a,b) i promieniu r. A więc w naszym przypadku należy zaznaczyć okrąg o środku w punkcie $(0,-1)$. i zaznaczyć wszystkie punkty na zewnątrz tego okręgu. Tak właśnie zrobiliśmy w poprzednim przykładzie. Ale rysowanie to nie tylko okręgi.

Zadanie 5. *Narysować zbiór zadany nierównością*

$$Re(z) > 1.$$



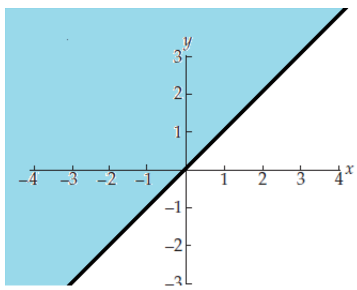
Zadanie 6. *Narysować zbiór zadany nierównością*

$$Re(z) \leqslant Im(z).$$

Wstawiamy $z = x + yi$ i dostajemy:

$$Re(x+yi) \leqslant Im(x+yi) \Leftrightarrow x \leqslant y.$$

Ostatni zbiór umiemy już narysować. Oznacza to, ze $y \geqslant x$, a więc zaznaczamy wszystkie punkty powyżej prostej $y = x$, łącznie z nią samą.



Zadanie 7. *Narysować zbiór zadany nierównością:*

$$|1 - \overline{z}| \geqslant |z + 2i|.$$

Po wstawieniu $z = x + yi$ (oraz $\overline{z} = x - yi$) dostajemy:

$$|1 - (x - yi)| > |x + yi + 2i|.$$

Zatem:

$$|1 - x + (-y)i| > |x + (y + 2)i|.$$

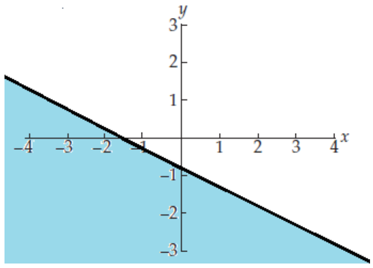
Po skorzystaniu z definicji modułu liczby zespolonej:

$$\sqrt{(1-x)^2 + y^2} > \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$

Po podniesieniu do kwadratu:

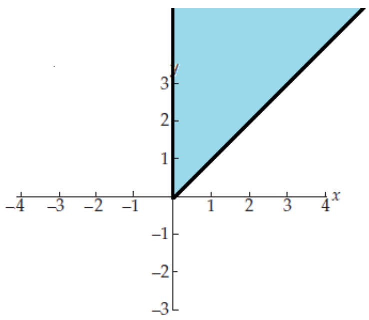
$$(1-x)^2 + y^2 > x^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow 1 - 2x + x^2 + y^2 > x^2 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow 2x + 4y + 3 \leqslant 0.$$

A więc po narysowaniu prostej $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ (a umiemy rysować proste?) zaznaczamy wszystkie punkty poniżej.



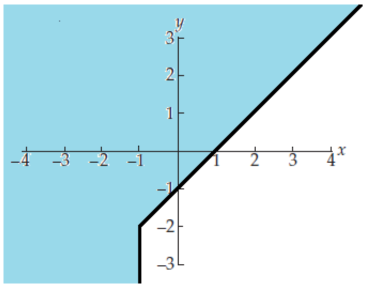
Zadanie 8. *Narysować zbiór liczb zespolonych spełniających nierówności:*

$$\frac{1}{4}\pi \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{1}{2}\pi.$$



Zadanie 9. *Narysować zbiór liczb zespolonych spełniających nierówności:*

$$\frac{1}{4}\pi \leqslant \arg(z + 1 + 2i) \leqslant \frac{3}{2}\pi.$$

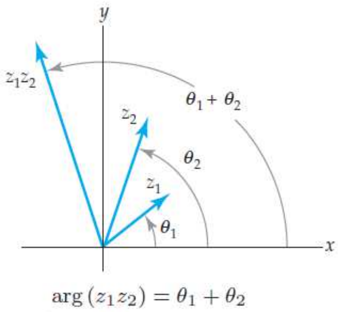


Mnożenie liczb zespolonych– polega na pomnożeniu modułów i dodaniu kątów. A więc wynik mnożenia liczb:

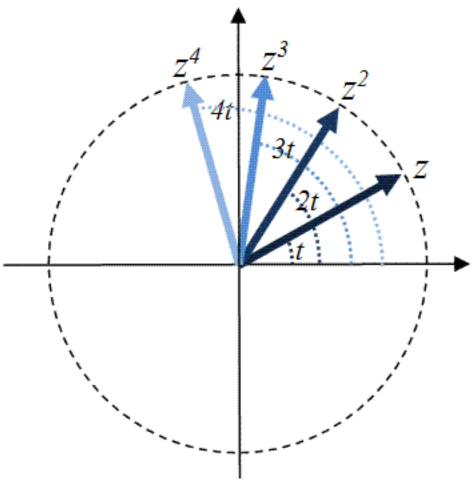
$$z_1 = |z_1|(\cos(\phi_1) + \sin(\phi_1)i), \quad z_2 = |z_2|(\cos(\phi_2) + \sin(\phi_2)i)$$

to liczba zespolona postaci:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\phi_1 + \phi_2) + \sin(\phi_1 + \phi_2)i).$$



Potęgowanie liczby o module 1 (zauważcie, że gdy moduł jest różny od 1 długość strzałek się zmienia, ale kąty dalej są równe)



Zastosowania wzoru de Moivre'a

W rozwiązywaniu zadań będziemy często stosowali **wzór de Moivre'a**.

$$z^n = |z|^n(\cos(\phi) + \sin(\phi)i)^n = |z|^n(\cos(n\phi) + \sin(n\phi)i).$$

- **Wyznaczanie części rzeczywistej i urojonej**

  Do tej pory aby wyznaczyć część rzeczywistą i zespoloną wystarczały proste sztuczki: wymnożenie nawiasów, uporzadkowanie wyrazów, wyciągnięcie niewymierności z mianownika. Ale to nie zawsze wystarczy.

  Zadanie 10. *Wyznacz część rzeczywistą i urojoną liczb:*

  a) $\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right)^{12}$

  b) $\left(\cos\frac{1}{5}x \;- i\sin\frac{1}{5}x\right)^{10}, \quad x \in \mathbb{R}$

- **Wyznaczanie pierwiastków wyższych stopni**

  Dotychczas nauczyliśmy się wyznaczać pierwiastki kwadratowe. Działo się to przez podstawienie. Mówiliśmy też o tym, że jedna liczba zespolona może mieć dwa różne pierwiastki. Co to jest piewiastkowanie z punktu widzenia geometrii?

  Zasada jest taka: jeśli z to liczba pierwiastkowana, to argument liczby $\sqrt[n]{z}$ to taki kąt α, ze

  $$n \cdot \alpha = arg(z).$$

  Potrzeba tu jednak pewnego wyjaśnienia. Co się stanie jeśli $arg(\sqrt[n]{z})$ jest duży? Na przykład: biorę $arg(\sqrt[4]{z}) = 100°$. No to $4 \cdot arg(\sqrt[n]{z}) = 400°$. Ale argument nie może być liczbą większą od $360°$. Co wtedy?

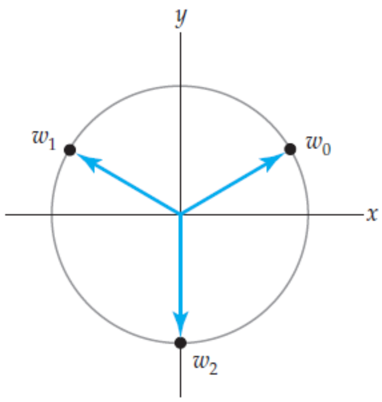
  <u>Przykład: pierwiastki stopnia 2 z liczby -1.</u>

  Wiemy, że $\sqrt{-1} = i$. Ale nie tylko! Istnieje także drugi pierwiastek z -1: liczba -i. Istotnie: $(-i)^2 = i^2 = -1$. Jak się ma do argumentów? Argument liczby -1 to $180°$. Argumenty jej pierwiastów powinny po podwojeniu dać $180°$.

  W jednym przypadku jest łatwo. Argument liczby i to $90°$. Zatem $2 \cdot 90° = 180°$. A więc $2 \cdot arg(i) = arg(-1)$. Tu się zgadza z wzorkiem wyżej.

A jak to jest dla $-i$? Argument liczby $-i$ to... $270°$ Jak weźmiemy $2 \cdot 270°$ to wychodzi $540°$. A powinno wyjść $180°$. I tu trzeba pamiętać: **argument to liczba od 0° do 360°**. Zatem jeśli wychodzi nam więcej niż 2π, to bierzemy poprawkę: $540° = 360° + 180°$. A więc argument liczby będącej kwadratem $-i$ to także $180°$.

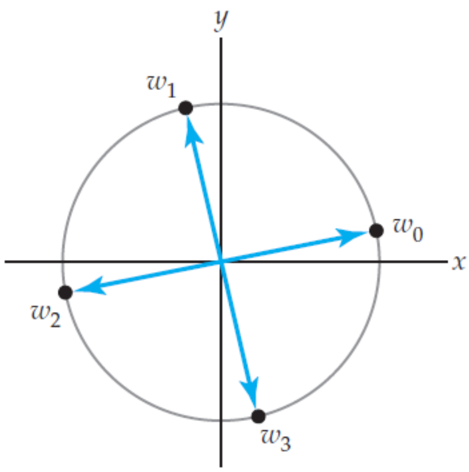
Tak samo z pierwiastkami z wyższych stopni. Na przykład $\sqrt[3]{i}$. Argument liczby 1 to $90°$. A więc pierwiastki stopnia 3 będą miały argumenty $30°, 150°, 270°$. Istotnie, potrojenie każdego z tych kątów daje (z dokładnością do 2π) kąt zerowy, a więc argument liczby 1. Na rysunku wygląda to tak:



Weźmy teraz $\sqrt[4]{1+i}$. Pierwiastki będą oczywiście cztery. Argument $1 + i$ to $\frac{\pi}{4}$. A więc argumenty pierwiastków to to

$$\frac{1}{16}\pi, \frac{5}{16}\pi, \frac{9}{16}\pi, \frac{13}{16}\pi.$$

Na rysunku wygląda to tak:



Ogólny fakt jest taki: jeśli chcemy wyznaczyć $\sqrt[n]{(z)}$, gdzie z ma postać trygonometryczną postaci:

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

to jest to n liczb danych wzorami:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi}{n} + i\sin\frac{\phi}{n}\right)\\
w_1 &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+2\pi}{n}\right)\\
w_2 &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi+4\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+4\pi}{n}\right)\\
&\dots\\
w_{n-1} &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+2(n-1)\pi}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Ogólny wzór ma więc postać:

$$
w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.
$$

Dla przykładu pierwiastki stopnia 3 z

$$
i = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)
$$

mają postać:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\\
w_1 &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\\
w_2 &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) = -i
\end{aligned}
$$

I jeszcze raz oglądamy je na rysunku: