Ćwiczenia X. Funkcje

Matematyka dla Geologii. Grupa 7.

Podczas dzisiejszych zajęć przypomnimy i rozszerzymy pewną wiedzę na temat funkcji jednej zmiennej. Będzie to dla nas wprowadzenie do przekształceń określonych na wielu zmiennych, którymi zajmiemy się za tydzień. Czym będzie dla nas funkcja? Zacznijmy od tego, że mamy dwa zbiory A, B. Obydwa są niepuste. I teraz z każdym elementem zbioru A kojarzymy dokładnie jeden element zbioru B. I tak powstaje funkcja f, której dziedziną jest zbiór A, a przeciwdziedziną jest zbiór B.

Przykład. Niech zbiór A będzie zbiorem wszystkich studentów Wydziału Geologii, a B niech będzie zbiorem liczb od 0 do 300. Każdemu elementowi zbioru A możemy przyporządkować element zbioru B, który oznaczać będzie np. wzrost studenta. Co warto zauważyć?

- jeden student nie może mieć dwóch wzrostów
- tego samego wzrostu może być więcej niż jeden student

Co to oznacza w języku funkcji f?

- funkcja f nie może mieć dwóch wartości dla jednego argumentu $a \in A$
- wartość $b \in B$ może być przyjjmowana przez f dla wielu argumentów ze zbioru A

To podstawowa intuicja. Naszym celem jest jednak pójść krok dalej i wsprowadzić pojęcie **obrazu zbioru przy funkcji** oraz **przeciwobrazu zbioru przy funkcji**. Co to znaczy? Wróćmy do przykładu ze studentami i wzrostem. W zbiorze studentów (czyli w zbiorze A) można wyróżnić wiele podzbiorów np. studenci I roku, kobiety, bruneci, blondyni itd. I można zadać pytanie: czy bruneci są wyżsi niż blondyni? Jak na to odpowiedzieć? W końcu jest wielu blondynów i wielu brunetów i mają różny wzrost. Tu przydaje się pojęcie **obrazu zbioru przy funkcji**.

Obraz zbioru $X \subseteq A$ przy funkcji $f : A \to B$ to zbiór wszystkich wartości funkcji f dla argumentów ze zbioru X. A więc w naszym przykładzie: X to zbiór brunetów, a obraz $f(X)$ to zbiór wysokości wszystkich brunetów, a więc pewien podzbiór B' zbioru B, na przykład przedział $[150, 180]$ i jeszcze przedział $[201, 202]$. Obraz zbioru to nie jakaś konkretna liczba, ale cały zbiór:

$$B' = f(X) = \{f(x), x \in X\}.$$

Można też zapytać: co wiemy o ludziach, którzy mają ponad 2 metry wzrostu? Co to za pytanie? Być może wielu ludzi ma taki wzrost, a może nikt? Jak by nie było, jest to pewien podzbiór zbioru studentów, a więc pewne $A' \subseteq A$. Wiąże się z tym pojęcie przeciwobrazu zbioru przy funkcji f. Biorę zbiór $Y = (200, 300]$. Jest to podzbiór zbioru B, pewien przedział wysokości. I teraz pytam jakie elementy $a \in A$ (a więc którzy studenci) mają tę własność, że $f(a) \in (200, 300]$? Tworzą one zbiór A'. I tak powstaje przeciwobraz A' zbioru $(200, 300]$ A więc:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A, f(x) \in Y\}.$$

* * *

Przejdźmy do przykładów liczbowych.

Zadanie 1. *Dana jest funkcja $f : R \to R$ zadana wzorem $f(x) = x + 1$. Wyznacz $f([0, 2])$.*