Ćwiczenia I. Liczby zespolone po raz pierwszy

Matematyka dla Geologii. Grupa 7.

Postać ogólna $z = a + bi$

W liceum pracowaliśmy z liczbami rzeczywistymi, a więc na przykład:

$$5, \quad \sqrt{3}, \quad \frac{\pi}{\sqrt{3.24} + \log_2 5}, \quad 2^{\frac{1}{2}}, \quad \ldots$$

Zbiór ten oznaczaliśmy przez $\mathbb{R}$. W zbiorze tym dokonywaliśmy dwóch podstawowych operacji: dodawanie i mnożenie. Obowiązywały przy tym dwie zasady:

- jeśli $a \in \mathbb{R}$ oraz $b \in \mathbb{R}$, to także $a + b \in \mathbb{R}$
- jeśli $a \in \mathbb{R}$ oraz $b \in \mathbb{R}$, to także $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

A co to są liczby zespolone $\mathbb{C}$? To zbiór zbudowany na podobnej zasadzie: też można dodawać i mnożyć. Suma i iloczyn dwóch liczb zespolonych nie przestaje być liczbą zespoloną. A tworzy się je tak: bierzemy liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ i dorzucamy do nich element obcy – o nazwie i. Umowa jest taka:

$$i \cdot i = i^2 = -1.$$

Żadna liczba rzeczywista nie spełnia równania $x^2 = -1$, a więc widzimy, że liczba i jest czymś istotnie nowym. Oczywiście - liczby zespolone to coś więcej niż $\mathbb{R}$ i liczba i. Pamiętamy o zasadach dodawania i mnożenie. Dla przykładu:

- skoro $i \in \mathbb{C}$ oraz $2 \in \mathbb{C}$, to także $2 + i \in \mathbb{C}$ oraz $2i \in \mathbb{C}$,
- skoro $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$ oraz $\pi \cdot i \in \mathbb{C}$, to także $2\pi \cdot i$ oraz $2 + \pi \cdot i$ należy do $\mathbb{C}$

Dowolna liczba $z \in \mathbb{C}$ opisana jest w tzw. **postaci ogólnej**:

$$z = a + bi,$$

gdzie a, b to dowolne liczby rzeczywiste.

- Liczbę a nazywamy **częścią rzeczywistą** z i oznaczamy przez $Re(z)$
- Liczbę b nazywamy **częścią urojoną** liczby z i oznaczamy przez $Im(z)$.

Dla przykładu:

- $-i = 0 + (-1) \cdot i$,
  $Re(-i) = 0,\ Im(-i) = -1$
- $-5 = -5 + 0 \cdot i$,
  $Re(-5) = -5,\ Im(-5) = 0$
- $1 - 2i = 1 + (-2) \cdot i$,
  $Re(1 - 2i) = 1,\ Im(1 - 2i) = -2$

Zadanie 1. *Wyznacz część rzeczywistą i urojoną liczb:*

a) i^3

b) $\frac{1}{i}$

c) $(1 + i)^2(1 + 2i)$

d) $\frac{1}{1+i}$

e) $\frac{1-i}{1+i}$

f) $\frac{2+3i}{(1-i)^2}$

Uwaga: wśród liczb zespolonych występują oczywiście wszystkie liczby rzeczywiste. Są to te liczby postaci $a + bi$, gdzie $b = 0$, a więc są to te liczby zespolone, które nie mają „kawałka obcego”.

Zadanie 2. *Wyznacz część rzeczywistą i urojoną liczby:*

$$\frac{1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{133}}{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{103}}.$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych. Równania kwadratowe.

Algorytm obliczania pierwiastków z liczb zespolonych

- sprowadzamy liczbę do postaci ogólnej $z = a + bi$, a więc wyznaczamy $Re(z)$, $Im(z)$,
- tworzymy równanie $(x + yi)^2 = a + bi$
- podnosimy lewą stronę do kwadratu i porównujemy części rzeczywiste i zespolone otrzymanych liczb. Dostajemy układ równań:
  $$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}.$$
- powyższy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie – parę (x,y). Szukany pierwiastek to liczba $x + yi$.

Zadanie 3. *Wyznacz pierwiastek z liczby:*

a) $2i$

b) $3-4i$

c) $-8+6i$

d) -16

e) $1+i$

- $\frac{1+i}{1-i}$

Rozwiązywanie równań w liczbach zespolonych. Metoda I - podstawienie.

Jeśli mamy równanie z jedną niewiadomą z (zespoloną), to rozwiązujemy przez:

- podstawienie $z = a + bi$
- przeniesienie wszystkich wyrazów na jedną stronę i uporządkowanie równania do wyrażenia:

$$\text{coś}_1 + \text{coś}_2 \cdot i = 0,$$

  gdzie $\text{coś}_1, \text{coś}_2$ to wyrażenia zależne od a, b
- rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} \text{coś}_1 = 0 \\ \text{coś}_2 = 0 \end{cases}$$

  Jeśli para (a, b) jest rozwiązaniem tego układu równań, to liczba $z = a + bi$ jest rozwiązaniem wyjściowego równania.

Zobaczmy to na przykładzie równania:

$$(2-i)z = 10 - z.$$

- krok pierwszy – podstawiamy $z = a + bi$:

$$(2-i)(a+bi) = 10 - (a+bi)$$

- krok drugi – porządkujemy wszystko do postaci $\text{coś}_1 + \text{coś}_2 \cdot i = 0$:

$$(2-i)(a+bi) = 10 - a - bi \Leftrightarrow 2a + 2bi - ai - bi^2 = 10 - a - bi \Leftrightarrow (3a + b - 10) + (3b - a)i = 0.$$

  A więc:

$$\text{coś}_1 = 3a + b - 10, \quad \text{coś}_2 = 3b - a.$$

- krok trzeci – rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 3a + b - 10 = 0 \\ 3b - a = 0. \end{cases}$$

  Rozwiązanie to: $a = 3, b = 1$, a więc jedyne rozwiązanie całego zadania to $z = 3 + i$.

Zadanie 4. *Załóżmy, że $z = a + bi$. Przyjmujemy umowę, że że $\overline{z} = a - bi$ jest tzw.* ***sprzężeniem liczby zespolonej****. Rozwiąż równania:*

a) $z^2 = i$

b) $z^3 = -1$

c) $(\overline{z})^2 = 2z$

d) $z^2 - 2i = 0$

e) $iz^2 - 3iz + 3i = 0$

Interpretacja geometryczna liczby zespolonej. Moduł i argument.

Stwierdziliśmy już, że każda liczba zespolona jest postaci $z = a + bi$, gdzie a, b to konkretna para liczb rzeczywistych. Możemy zatem umieścić z w układzie współrzędnych na współrzędnej (a, b). W ten sposób każda liczba rzeczywista ma swój odpowiednik na płaszczyźnie. Liczba $i = 0 + 1 \cdot i$ ma na przykład współrzędne $(0, 1)$.

Z każdą liczbą zespoloną $z = a + bi$ wiązać będziemy dwie wielkości:

- moduł liczby zespolonej, ozn. $|z|$ a więc odległość punktu (a, b) od początku układu współrzędnych równą $\sqrt{a^2 + b^2}$
- argument liczby zespolonej, ozn. $arg(z)$, a więc kąt z przedziału $(0, 2\pi)$ nachylenia odcinka o końcach $(0, 0)$ oraz (a, b) do osi OX (liczymy go w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara)

Zadanie 5.

Wyznacz moduł i argument liczb zespolonych (moduł ze wzoru, argument na razie z rysunku).

a) i

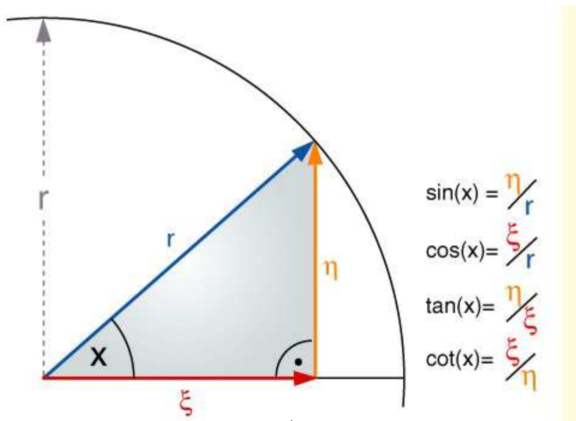
b) -1

c) $-1 + i$

d) $\sqrt{3} + i$

e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Przy wyznaczaniu argumentów niezbędnym staje się przypomnienie sobie podstawowych informacji z trygonometrii. Przypomnijmy sobie definicję funkcji sinus, cosinus, tangens i cotangens dla kąta ostrego:



Należy zapamiętać tabelkę podstawowych wartości funkcji trygonometrycznych:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	0° - 90°	90° - 180°	180° - 270°	270° - 360°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0	+	+	-	-
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	+	-	-	+
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	0	X	0	+	-	+	-
ctgα	X	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	X	0	X	+	-	+	-

Każdą liczbę zespoloną można przedstawić w postaci trygonometrycznej:

$$z = |z|(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)i), \quad \alpha = arg(z).$$

Algorytm wyznaczania postaci trygonometrycznej

- sprowadzamy liczbę do postaci ogólnej $z = a + bi$, a więc wyznaczamy $Re(z)$, $Im(z)$,
- obliczamy moduł $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- liczymy wartości $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,
- znajdujemy taki kąt α, że $\cos(\alpha) = x, \sin(\alpha) = y$ (tabelka!),
- rozwiązanie: $z = |z| \cdot (\cos(\alpha) + \sin(\alpha)i)$.

Zadanie 6. *Wyznacz postać trygonometryczną liczby:*

a) 7

b) $12 + 12i$

c) $2 + 2\sqrt{3}i$

d) $1 - i$

e) $-1 - i$